Niech $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ będą otwarte.

Definicja. Niech $\omega : \Omega^k(U)$, $f : V \to U$ będzie gładkie. Definiujemy $f^*\omega \in \Omega^k(V)$ *przeciągnięcie formy ω za pomocą f* wzorem

$$f^*\omega(x)(u_1, \dots, u_k) = \omega(f(x))(\mathrm{D}f(x)u_1, \dots, \mathrm{D}f(x)u_k)$$

dla $x \in V$ oraz $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$.

Definicja. Operator liniowy $d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$ określamy wzorem

$$d\omega(x)(u_0, \dots, u_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i (\mathrm{D}\omega(x)u_i)(u_0, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k)$$

dla $\omega \in \Omega^k(U)$, $x \in U$, $u_0, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$.

Uwaga. Jeśli $e_1, \dots, e_n$ to baza standardowa $\mathbb{R}^n$, zaś $\omega \in \Omega^k(U)$ zapisuje się bazie jako $\omega = \omega_\lambda dx_\lambda$ dla pewnych $\omega_\lambda \in C^\infty(U) = \Omega^0(U)$, to

$$d\omega(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda(n,k)} d\omega_\lambda \wedge dx_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda(n,k)} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}\omega_\lambda(x)e_i \, dx_i \wedge dx_\lambda \, .$$

Dla $\eta \in \Omega^l(U)$ oraz $f \in C^\infty(V, U)$ zachodzą również wzory:

$$d(d\omega) = 0 \, , \quad d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k d\eta \, , \quad d(f^*\omega) = f^*(d\omega) \, .$$

Definicja. Forma $\omega \in \Omega^k(U)$ jest *zamknięta* jeśli $d\omega = 0$.
Forma $\omega \in \Omega^k(U)$ jest *dokładna* jeśli $\omega = d\eta$ dla pewnej $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$.

Definicja. Niech $M \subseteq N \subseteq U$, M i N będą rozmaitościami wymiaru m klasy C^1, $\partial M := \overline{M} \setminus M$ będzie rozmaitością wymiaru $m-1$ klasy C^1. Przez *zewnętrzny wektor normalny do M w punkcie $p \in \partial M$* rozumiemy jedyny wektor $\nu_M(p) \in \mathbb{R}^n$ spełniający

$$\|\nu_M(p)\| = 1 \, , \quad \nu_M(p) \in T_pN \, , \quad \nu_M(p) \perp T_p\partial M$$

oraz dla każdej krzywej $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ spełniającej $\gamma(0) = p$ oraz $\gamma'(0) = \nu_M(p)$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że

$$\gamma(t) \in \mathbb{R}^n \setminus M \quad \text{dla } t \in (0, \varepsilon) \, .$$

Twierdzenie. *Niech M, N będą jak wyżej, τ zadaje orientację N, σ zadaje orientację ∂M, $\nu_M(p) \wedge \sigma(p) = \tau(p)$ dla $p \in \partial M$. Wówczas*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega \quad \text{dla } \omega \in \Omega^{m-1}(U) \, .$$

Uwaga. Załóżmy, że $v_1, \dots, v_m$ jest bazą T_pN, $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ spełnia $\alpha(v_1) = 1$ oraz $\alpha(v_i) = 0$ dla $i \in \{2, 3, \dots, m\}$, $v_2, \dots, v_m$ rozpina $T_p\partial M$, $\tau(p) = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$. Wówczas $\sigma(p) = \tau(p) \llcorner \alpha = v_2 \wedge \dots \wedge v_m$. W tym podejściu nie korzystamy z pojęcia ortogonalności.

1. Niech $f \in C^\infty(V, U)$, zaś $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_j dx_j$. Wyznacz z definicji wzór na $f^*\omega$.
2. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dane przez $f(u, v) = (u^2, uv)$, zaś $\omega = ydx + xdy$. Wyznacz $f^*\omega$.
3. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dana jest przez
$$f(u, v, t) = (x(v, t), y(u, t), z(u, v)) .$$
Wyznacz $f^*(xyz\, dx \wedge dz)$.
4. Scharakteryzuj formy które są jednocześnie zamknięte i dokładne na $\mathbb{R}$ oraz na $\mathbb{R}^2$.
5. Niech $f : V \to U$ będzie gładkim dyfeomorfizmem. Wyznacz $f^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)$.
6. Wyznacz $d\omega$ jeśli
   (a) $\omega = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_2 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_3$.
   (b) $\omega = f(x_1)dx_1 + f_2(x_2)dx_2 + \cdots + f_n(x_n)dx_n$.
   (c) $\omega = f_1(x_2, x_3)dx_2 \wedge dx_3 + f_2(x_1, x_3)dx_3 \wedge dx_1 + f_3(x_1, x_2)dx_1 \wedge dx_2$.
   (d) $\omega = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}(f\mathrm{D}_k g - g\mathrm{D}_k f)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n$.

   Załóż, że wszystkie funkcje $f, g, f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są gładkie.
7. Niech $F = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2$, gdzie $U \subseteq \mathbb{R}^3$ jest otwarty. Wyznacz $F^*(dy_1 \wedge dy_2)$. Oblicz $dF^*(dy_1 \wedge dy_2)$.
8. Niech $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będą gładkie. Wyznacz $d\omega$ jeśli
$$\omega = \sum_{k=1}^n f_k\, dx_{k+1} \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{k-1} \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n) .$$
9. Niech $R, a, b > 0$. Oblicz $\int_M \omega$ jeśli
   (a) $M = \{(t, t^2, t^3) : t \in (0, 1)\}$ oraz $\omega = dx + dy + dz$.
   (b) $M = \{(u, t, u^2 + t^2) : u^2 + t^2 < 1\}$ oraz $\omega = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydx \wedge dz$.
   (c) $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2,\ z \in [0, 2]\}$ oraz $\omega = y^2 dx \wedge dz + zdx \wedge dy$.
   (d) $M = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z > 0\}$ oraz $\omega = xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$.
   (e) $M = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ oraz $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$.
   (f) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\}$ oraz $\omega = (x + y)dx + (x - y)dy$.
   (g) M to odcinek $(0, 1) \to (2, 3)$ oraz $\omega = (\pi x + y)dx + (x - \sqrt{2}y)dy$.
   (h) M to łamana $(0, 1) \to (2, 1) \to (2, 3)$ oraz $\omega = (\pi x + y)dx + (x - \sqrt{2}y)dy$.
   (i) $M = \{(x, y) : x = y^2,\ y \in (-1, 1)\}$ oraz $\omega = (x^2 + y)dx + (x - y)dy$.

(j) $M = \{(R\cos t, R\sin t) : t \in (0, 2\pi)\}$ oraz $\omega = (xdx)/(x^2 + y^2)$.

(k) $M = \{(R\cos t, R\sin t) : t \in (0, 2\pi)\}$ oraz $\omega = (xdy)/(x^2 + y^2)$.

10. Niech $a, b > 0$. Korzystając ze wzoru Greena oblicz pole elipsy $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x/a)^2 + (y/b)^2 \leqslant 1\}$.

11. Niech $a > 0$. Korzystając ze wzoru Greena oblicz pole jednego *liścia Kartezujsza*, czyli obszaru ograniczonego krzywą $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 = 3axy\}$.

    Wskazówka. Połóż $y = tx$ żeby dostać parametryzację.

12. Niech $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dane będą przez $f(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$ oraz $g(x, y) = x/(x^2 + y^2)$.

    (a) Sprawdź, że $\mathrm{D}_2 f = \mathrm{D}_1 g$.

    (b) Niech γ będzie okręgiem jednostkowym. Oblicz $\int_\gamma f dx + g dy$.

    (c) Niech γ będzie okręgiem o środku w $(\sqrt{7}, \sqrt{3})$ i promieniu 10. Oblicz $\int_\gamma f dx + g dy$.

    (d) Niech γ będzie okręgiem o środku w $(\sqrt{7}, \sqrt{3})$ i promieniu 3. Oblicz $\int_\gamma f dx + g dy$.

13. Zbadaj, czy pole wektorowe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest *potencjalne*, tzn, czy istnieje potencjał $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taki, że $\operatorname{grad} F = f$.

    (a) $f(x, y) = (e^y, xe^y + y)$.

    (b) $f(x, y) = (y^2 e^{xy}, (1 + xy)e^{xy})$.

    (c) $f(x, y) = (xy^2, x^2 y + y^3)$.

14. Niech $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ będzie dana w bazie standardowej wzorem

$$\omega = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy\,.$$

    Udowodnij, że ω jest całkowalna w $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, tj. istnieje $\eta \in \Omega^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ taka, że $\omega = d\eta$.

15. Niech $\omega : \mathbb{R}^2 \to \bigwedge^1(\mathbb{R}^2)^*$ będzie dana wzorem $\omega = |x+y|dx + |x+y|dy$ oraz $p, q \in \mathbb{R}^2$. Czy wartość całki $\int_\gamma \omega$ zależy od wyboru drogi γ łączącej p i q?

16. Niech $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \bigwedge^1(\mathbb{R}^2)^*$ będzie dana wzorem $\omega = (ydx - xdy)/(x^2 + xy + y^2)$ oraz $p, q \in \mathbb{R}^2$. Czy wartość całki $\int_\gamma \omega$ zależy od wyboru drogi γ łączącej p i q w $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$?

17. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie klasy C^1 oraz $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ będzie bazą ortonormalną $\mathbb{R}^n$. Kładziemy $f_i(x) = \langle f(x), e_i \rangle$ dla $x \in \mathbb{R}^n$ oraz $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

(a) Pokaż, że
$$\det \mathrm{D}f(x) = df_1(x) \wedge \cdots \wedge df_n(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n\,.$$

(b) Niech f ma zwarty nośnik, tj. istnieje zbiór zwarty $K \subseteq \mathbb{R}^n$ taki, że $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Pokaż, że
$$\int \det \mathrm{D}f \, \mathrm{d}\lambda_n = 0\,.$$

Wskazówka. Użyj twierdzenia Stokesa.