We wszystkich zadaniach będziemy zakładać, że $X$ jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową, $n = \dim X$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$.

**Definicja.** Niech $\sigma : \{1, \dots, p\} \to \{1, \dots, p\}$ będzie permutacją. Definiujemy $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^N$, gdzie $N$ jest liczbą par $(i, j)$ takich, że $i < j$ ale $\sigma(i) > \sigma(j)$.

**Definicja.** Przekształcenie $k$-liniowe $f : X \times \dots \times X \to Z$ nazywamy *antysymetrycznym* jeśli dla każdych $x_1, \dots, x_k \in X$ oraz permutacji $\sigma : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}$ zachodzi

$$f(x_1, \dots, x_k) = (\operatorname{sgn} \sigma) \cdot f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) .$$

W szczególności mamy $f(x_1, \dots, x_k) = 0$ jeśli $x_i = x_j$ dla pewnych $i \neq j$.

**Definicja.** Mówimy, że para $(W, \mu)$ jest *$k$-tą potęgą zewnętrzną* $X$ jeśli $\mu : X \times \dots \times X \to W$ jest $k$-liniowe i antysymetryczne oraz zachodzi następująca *własność uniwersalna*: dla każdego przekształcenia $k$-liniowego i antysymetrycznego $f : X \times \dots \times X \to Z$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\bar{f} : W \to Z$ takie, że $f = \bar{f} \circ \mu$.

**Uwaga.** Będziemy pisać $\bigwedge^k X = W$ oraz $x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \mu(x_1, \dots, x_k)$ dla $x_1, \dots, x_k \in X$. W szczególności mamy $\bigwedge^0 X = \mathbb{R}$, $\bigwedge^1 X = X$ oraz $\bigwedge^m X = \{0\}$ dla $m > n$.

**Definicja.** Przez $\Lambda(n, m)$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji rosnących $\{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$.

---

1. Pokaż, że jeśli $(V, \mu)$ oraz $(W, \nu)$ są $k$-tymi potęgami zewnętrznymi przestrzeni $X$, to $V$ i $W$ są liniowo izomorficzne, a (kanoniczny) izomorfizm między nimi można skonstruować posługując się wyłącznie przekształceniami $\mu$ i $\nu$ oraz uniwersalną własnością potęgi zewnętrznej (w szczególności nie ma potrzeby wybierania bazy).

2. Pokaż, że jeśli $(W, \mu)$ jest $k$-tą potęgą zewnętrzną $X$, to

   (a) obraz przekształcenia $\mu$ rozpina całą przestrzeń $W$;

   (b) jeśli $v_1, \dots, v_n$ jest bazą $X$, to wektory $\mu(v_{\lambda(1)}, \dots, v_{\lambda(k)}) \in W$ odpowiadające $\lambda \in \Lambda(n, k)$ są liniowo niezależne.

3. Niech $v_1, \dots, v_n$ będzie dowolną bazą $X$. Niech $W$ będzie przestrzenią liniową rozpiętą na zbiorze $\Lambda(n, k)$, tzn. $W$ jest przestrzenią liniową wymiaru $\binom{n}{k}$ z bazą $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n, k)\}$. Dla $\lambda \in \Lambda(n, k)$ kładziemy $\mu(v_{\lambda(1)}, \dots, v_{\lambda(k)}) = v_\lambda \in W$.

   Pokaż, że $\mu$ rozszerza się jednoznacznie do przekształcenia $k$-liniowego i antysymetrycznego $\mu : X \times \dots \times X \to W$ oraz $(W, \mu)$ jest $k$-tą potęgą zewnętrzną $X$.

4. Niech $0 \leqslant l, k \leqslant n$ oraz $l + k \leqslant n$. Pokaż, że istnieje dwuliniowe przekształcenie $f : \bigwedge^k X \times \bigwedge^l X \to \bigwedge^{k+l} X$ takie, że

   $$f(v_1 \wedge \dots \wedge v_k, v_{k+1} \wedge \dots \wedge v_{l+k}) = v_1 \wedge \dots \wedge v_{l+k} \quad \text{dla } v_1, \dots, v_{l+k} \in X .$$

   Niech $v_1, \dots, v_n$ będzie bazą $X$. Załóżmy, że

   $$\xi = \textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda(n,k)} \xi_\lambda v_\lambda \in \bigwedge^k X \quad \text{oraz} \quad \eta = \textstyle\sum_{\lambda \in \Lambda(n,l)} \eta_\lambda v_\lambda \in \bigwedge^k X \in \bigwedge^l X .$$

Znajdź współrzędne $(k+l)$-wektora $f(\xi,\eta)$ w bazie $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n,k+l)\}$.

*Uwaga.* $(k+l)$-wektor $f(\xi,\eta)$ będziemy oznaczać symbolem $\xi \wedge \eta$.

*Uwaga.* Można myśleć, że $\bigwedge^k X$ to po prostu zbiór wszystkich napisów postaci

$$\textstyle\sum_{\lambda\in\Lambda(n,k)} \alpha_\lambda v_\lambda \quad \text{gdzie } \alpha_\lambda \in \mathbb{R}$$

z naturalnie zdefiniowanymi operacjami liniowymi. Ponadto na sumie prostej wszystkich $\bigwedge^l X$ dla $l = 0,1,\dots,n$, tzn. na $\bigwedge^* X = \bigoplus_{l=0}^n \bigwedge^l X$, mamy zdefiniowaną dodatkową operację mnożenia $\wedge$ spełniającą $v \wedge v = 0$ dla $v \in X = \bigwedge^1 X$. To nadaje przestrzeni liniowej $\bigwedge^* X$ strukturę algebry.

5. Niech $n=3$, $X = \mathbb{R}^3$, $e_1, e_2, e_3$ będzie bazą standardową $\mathbb{R}^3$. Znajdź współrzędne 2-wektora $(1,1,0) \wedge (-1,1,0)$ w bazie $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$.

6. Skonstruuj monomorfizm $\bigwedge^2 X^* \to \mathrm{Hom}(\bigwedge^2 X, R)$.

7. Niech $k+l \leqslant n$, $\alpha : X \times \cdots \times X \to \mathbb{R}$ będzie $k$-liniowe i antysymetryczne, zaś $\beta : X \times \cdots \times X \to \mathbb{R}$ będzie $l$-liniowe i antysymetryczne. Dla $x_1,\dots,x_{k+l} \in X$ definiujemy

$$\zeta(x_1,\dots,x_{k+l}) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Sh}(k,l)} (\operatorname{sgn}\sigma)\cdot \alpha(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)})\beta(x_{\sigma(k+1)},\dots,x_{\sigma(k+l)})\,, \tag{1}$$

gdzie $\mathrm{Sh}(k,l)$ oznacza zbiór permutacji $\sigma$ zbioru $\{1,\dots,k+l\}$ takich, że $\sigma$ jest rosnąca na każdym ze zbiorów $\{1,\dots,k\}$ oraz $\{k+1,\dots,k+l\}$.

   (a) Pokaż, że przekształcenie $\zeta$ jest $(k+l)$-liniowe i antysymetryczne.

   *Uwaga.* Wprost z definicji potęgi zewnętrznej otrzymujemy przekształcenia liniowe $\bar\alpha \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^k X,\mathbb{R})$, $\bar\beta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^l X,\mathbb{R})$ oraz $\bar\zeta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^{k+l} X,\mathbb{R})$. Będziemy utożsamiać $\alpha$ i $\beta$ z $\bar\alpha$ i $\bar\beta$, zaś zdefiniowane wyżej przekształcenie $\zeta$ będziemy oznaczać $\alpha\wedge\beta$.

   (b) Pokaż, że wzór (1) indukuje dwuliniowe przekształcenie $\wedge : \mathrm{Hom}(\bigwedge^k X,\mathbb{R}) \times \mathrm{Hom}(\bigwedge^l X,\mathbb{R}) \to \mathrm{Hom}(\bigwedge^{l+k} X,\mathbb{R})$ oraz

$$\alpha\wedge\beta = (-1)^{lk}\beta\wedge\alpha\,.$$

   (c) Pokaż, że jeśli $p+q+r \leqslant n$, $\alpha \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^p X,\mathbb{R})$, $\beta \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^q X,\mathbb{R})$, $\gamma \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^r X,\mathbb{R})$, to $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma = \alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$.

   (d) Pokaż, że jeśli $\omega_1,\dots,\omega_k \in \mathrm{Hom}(X,\mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\bigwedge^1 X,\mathbb{R})$ oraz $v_1,\dots,v_k \in X$, to

$$\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k(v_1,\dots,v_k) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Perm}(k)} (\operatorname{sgn}\sigma)\cdot\omega_1(v_{\sigma(1)})\cdots\omega_k(v_{\sigma(k)})\,.$$

8. Niech $v_1, \dots, v_n \in X$ oraz $\omega_1, \dots, \omega_n \in X^*$ będą bazami dualnymi, tzn.

$$\omega_i(v_i) = 1 \quad \text{oraz} \quad \omega_i(v_j) = 0 \quad \text{dla } i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ oraz } i \neq j\,.$$

Dla $\lambda \in \Lambda(n,k)$ kładziemy

$$v_\lambda = v_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge v_{\lambda(k)} \in \textstyle\bigwedge^k X \quad \text{oraz} \quad \omega_\lambda = \omega_{\lambda(1)} \wedge \dots \wedge \omega_{\lambda(k)} \in \mathrm{Hom}(\textstyle\bigwedge^k X, \mathbb{R})\,.$$

Pokaż, że $\omega_\lambda(v_\lambda) = 1$ oraz $\omega_\lambda(v_\sigma) = 0$ jeśli $\lambda \neq \sigma$. Wywnioskuj, że $\{\omega_\lambda : \lambda \in \Lambda(n,k)\}$ jest bazą przestrzeni $\mathrm{Hom}(\bigwedge^k X, \mathbb{R})$ dualną do bazy $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n,k)\} \subseteq \bigwedge^k X$.

9. Niech $(\bigwedge^k X^*, \mu)$ będzie $k$-tą potęgą zewnętrzną $X^*$. Skonstruuj izomorfizm liniowy

$$f : \textstyle\bigwedge^k X^* \to (\bigwedge^k X)^* = \mathrm{Hom}(\bigwedge^k X, \mathbb{R})$$

taki, że

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k = f(\mu(\alpha_1, \dots, \alpha_k)) \quad \text{dla } \alpha_1, \dots, \alpha_k \in X^*\,.$$

*Uwaga.* Widzimy zatem, że $(\mathrm{Hom}(\bigwedge^k X, \mathbb{R}), \wedge)$ jest jedną z możliwych (izomorficznych) realizacji $k$-tej potęgi zewnętrznej $X^*$.

---

## Zadania dodatkowe

10. Niech $Y$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową. Pokaż, że dla każdego $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\bigwedge^k f : \bigwedge^k X \to \bigwedge^k Y$ takie, że dla wszystkich $v_1, \dots, v_k \in X$ zachodzi

$$\textstyle\bigwedge^k f(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) = \mu(f(v_1), \dots, f(v_k)) = f(v_1) \wedge \dots \wedge f(v_k)\,.$$

11. Niech $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}(Z, X)$. Pokaż, że $\bigwedge^k (f \circ g) = \bigwedge^k f \circ \bigwedge^k g$.

12. Niech $f \in \mathrm{Hom}(X, X)$. Pokaż, że

$$\textstyle\bigwedge^n f(v) = \det(f) \cdot v \quad \text{dla każdego } v \in \bigwedge^n X \simeq \mathbb{R}\,.$$

Wywnioskuj, że jeśli $g \in \mathrm{Hom}(X, X)$, to

$$\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)\,.$$

---

### Przypomnienie kilku faktów z GALu

**Definicja.** Niech $X$ i $Y$ będą przestrzeniami liniowymi. Jeśli $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, to definiujemy $f^* \in \mathrm{Hom}(Y^*, X^*)$ wzorem

$$f^*(\alpha) = \alpha \circ f \quad \text{dla } \alpha \in Y^*\,.$$

**Uwaga.** Niech $\dim X = n < \infty$. Istnieje naturalny izomorfizm $\mathrm{ev} : X \to X^{**}$ (*ewaluacja*) zadany przez

$$\mathrm{ev}(v)(\phi) = \phi(v) \quad \text{dla } v \in X \text{ oraz } \phi \in X^* .$$

Mimo, że ev jest *naturalny* (tj. nie zależy od żadnych wyborów), trudno wypisać przekształcenie odwrotne bez wybrania bazy. Wybierzmy bazy dualne $v_1, \ldots, v_n \in X$ i $\omega_1, \ldots, \omega_n \in X^*$. Wtedy

$$\mathrm{ev}^{-1}(\Phi) = \textstyle\sum_{i=1}^n \Phi(\omega_i) v_i \quad \text{dla } \Phi \in X^{**} .$$

**Definicja.** Załóżmy, że skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe $X$ i $Y$ wyposażone są w iloczyny skalarne $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ i $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$. Wówczas

1. przestrzeń $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$ jest naturalnie izomorficzna z $X$ przez izomorfizm $X \to X^*$ przyporządkowujący wektorowi $v \in X$ funkcjonał $\omega_v \in X^*$ taki, że $\omega_v(v) = 1$ oraz $\ker \omega_v = \mathrm{lin}\{v\}^{\perp}$;

   *Uwaga.* Powyższy izomorfizm jest *naturalny* pomiędzy przestrzeniami z iloczynem skalarnym, tzn. nie zależy od żadnych wyborów poza tymi, które i tak zostały już dokonane.

2. jeśli $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, to definiujemy $f^* \in \mathrm{Hom}(Y, X)$ poprzez warunek

   $$\langle u,\, f(v) \rangle_Y = \langle f^*(u),\, v \rangle_X \quad \text{dla } u, v \in Y ;$$

3. dwie definicje $f^*$ pokrywają się przy naturalnym utożsamieniu $X$ z $X^*$ oraz $Y$ z $Y^*$;

4. przestrzeń liniową $\mathrm{Hom}(X, Y)$ wyposażamy w iloczyn skalarny wzorem

   $$\langle f,\, g \rangle = \mathrm{trace}(f^* \circ g) \quad \text{dla } f, g \in \mathrm{Hom}(X, Y) ;$$

5. iloczyn wektorowy $w_1 \times \cdots \times w_{n-1} \in X$ wektorów $w_1, \ldots, w_{n-1} \in X$ scharakteryzowany jest przez własność

   $$\langle w,\, w_1 \times \cdots \times w_{n-1} \rangle_X = \det(w, w_1, \ldots, w_{n-1}) \quad \text{dla } w \in X .$$

6. przestrzeń liniową $\bigwedge^k X$ wyposażamy w iloczyn skalarny w taki sposób, że jeśli $v_1, \ldots, v_n$ jest bazą ortonormalną $X$, to układ $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n, k)\}$ jest ortonormalny.

---

13. Niech $X$ i $Z$ będą przestrzeniami liniowymi wyposażonymi w iloczyny skalarne, $\dim X = n$, $\dim Z = k$, $f \in \mathrm{Hom}(Z, X)$. Pokaż, że

    $$\| \textstyle\bigwedge^k f \|_2^2 = \langle \bigwedge^k f,\, \bigwedge^k f \rangle = \det(f^* \circ f) .$$

    *Uwaga.* Można zatem interpretować wyznacznik Gramma $f$ jako długość $f$ traktowanego jako wektor w przestrzeni $\mathrm{Hom}(Z, X)$.

**Definicja.** Elementy $\bigwedge^k X$ będziemy nazywać *$k$-wektorami.* Elementy $\bigwedge^k X^*$ będziemy nazywać *$k$-formami.* Jeśli $k$-wektor $\xi$ jest postaci $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ dla pewnych $v_1, \ldots, v_k \in X$, to mówimy, że $\xi$ jest *prosty.* Z każdym $k$-wektorem $\xi \in \bigwedge^k X$ stowarzyszamy podprzestrzeń liniową $T(\xi) \subseteq X$ wzorem

$$T(\xi) = \{v \in X : \xi \wedge v = 0\} .$$

---

14. Niech $\xi \in \bigwedge^k X$ oraz $\xi \neq 0$. Pokaż, że $m = \dim T(\xi) \leqslant k$ oraz jeśli $e_1, \ldots, e_m \in X$ rozpinają $T(\xi)$, to istnieje $(k-m)$-wektor $\zeta \in \bigwedge^{k-m} X$ taki, że

$$\xi = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \wedge \zeta \,.$$

Wywnioskuj, że

(a) $0 \neq \xi \in \bigwedge^k X$ jest prosty wtedy i tylko wtedy gdy $\dim T(\xi) = k$;

(b) jeśli $\xi, \zeta \in \bigwedge^k X \setminus \{0\}$ są proste, to $T(\xi) = T(\zeta)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\xi = c\zeta$ dla pewnej liczby $c \in \mathbb{R}$;

(c) jeśli $0 \neq \xi \in \bigwedge^k X$ oraz $0 \neq \zeta \in \bigwedge^l X$ są proste, to $\xi \wedge \eta \neq 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $T(\xi) \cap T(\zeta) = \{0\}$ oraz $T(\xi) + T(\zeta) = T(\xi \wedge \zeta)$;

(d) jeśli $\xi \in \bigwedge^k X$ oraz $\zeta \in \bigwedge^l X$ są proste, to $T(\xi) \subseteq T(\zeta)$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $\eta \in \bigwedge^{l-k} X$ taki, że $\zeta = \xi \wedge \eta$.

15. [Kontrakcje] Niech $0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. Udowodnij, że istnieją dwuliniowe przekształcenia

$$\lrcorner : \bigwedge^p X \times \bigwedge^q X^* \to \bigwedge^{q-p} X^* \,,$$
$$\llcorner : \bigwedge^q X \times \bigwedge^p X^* \to \bigwedge^{q-p} X \,,$$

spełniające

$$(\eta \lrcorner \phi)(\xi) = \phi(\xi \wedge \eta) \quad \text{dla } \xi \in \bigwedge^{q-p} X,\ \eta \in \bigwedge^p X,\ \phi \in \bigwedge^q X^* \,,$$
$$\beta(\zeta \llcorner \alpha) = (\alpha \wedge \beta)(\zeta) \quad \text{dla } \zeta \in \bigwedge^q X,\ \alpha \in \bigwedge^p X^*,\ \beta \in \bigwedge^{q-p} X^* \,.$$

Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą $X$, zaś $\omega_1, \ldots, \omega_n$ będzie dualną bazą $X^*$. Znajdź postać $\eta \lrcorner \phi$ oraz $\zeta \llcorner \alpha$ wyrażoną w bazach $\{v_\lambda : \lambda \in \Lambda(n, q-p)\}$ i $\{\omega_\lambda : \lambda \in \Lambda(n, q-p)\}$.

*Wskazówka.* Jeśli $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$, to przekształcenie $f^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ dane jest wzorem $f^*(\alpha) = \alpha \circ f$. Rozważ $f_\eta : \bigwedge^{q-p} X \to \bigwedge^q X$ dane wzorem $f_\eta(\xi) = \xi \wedge \eta$. Do konstrukcji $\llcorner$ trzeba skorzystać z naturalnego izomorfizmu $\bigwedge^q X \simeq (\bigwedge^q X)^{**}$.

16. [Gwiazdka Hodge'a] Niech $X$ będzie wyposażona w iloczyn skalarny $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $(v_1, \ldots, v_n)$ będzie (uporządkowaną) bazą ortonormalną $X$, zaś $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ będzie dualną bazą $X^*$. Definiujemy izomorfizmy liniowe

$$* : \bigwedge^k X \to \bigwedge^{n-k} X \quad \text{oraz} \quad * : \bigwedge^k X^* \to \bigwedge^{n-k} X^* \,,$$

zadając je na bazie w następujący sposób

$$*v_\lambda = (-1)^N v_\sigma \quad \text{oraz} \quad *\,\omega_\lambda = (-1)^N \omega_\sigma \,,$$

gdzie $\lambda \in \Lambda(n,k)$, $\sigma \in \Lambda(n, n-k)$ są takie, że $\operatorname{im} \lambda \cup \operatorname{im} \sigma = \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz $N$ jest liczbą par $(i,j) \in \operatorname{im} \lambda \times \operatorname{im} \sigma$ takich, że $i > j$.

Niech $w_1, \dots, w_{n-1} \in X$. Pokaż, że

$$*(w_1 \wedge \cdots \wedge w_{n-1}) = w_1 \times \cdots \times w_{n-1} \in X\,.$$

*Uwaga.* W istocie definicje $*$ nie zależą od wyboru bazy, a jedynie od wyboru *orientacji*, czyli elementu $E \in \bigwedge^n X$ takiego, że $\langle E,\, E\rangle = 1$. Jeśli $\xi \in \bigwedge^k X$, to $*\xi = E \llcorner \gamma_k(\xi)$, gdzie $\gamma_k : \bigwedge^k X \to \bigwedge^k X^*$ dana jest przez $\gamma_k(\xi)(\eta) = \langle \xi,\, \eta\rangle$. Podobnie jeśli $\phi \in \bigwedge^k X^*$, to $*\phi = \gamma_{n-k}(E \llcorner \phi)$.

17. Niech $v_1, \dots, v_n$, $\omega_1, \dots, \omega_n$ będą jak w poprzednim zadaniu, $\xi, \eta \in \bigwedge^k X$, $\phi, \psi \in \bigwedge^k X^*$, $\eta \in \bigwedge^{n-k} X$. Pokaż, że

$$\xi \wedge *\eta = \langle \xi,\, \eta\rangle v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\,, \quad \phi \wedge *\psi = \langle \phi,\, \psi\rangle \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n\,,$$
$$\phi(\xi) = *\phi(*\xi)\,, \quad *\phi(\eta) = (-1)^{k(n-k)}\phi(*\eta)\,.$$

18. Niech $0 \neq \xi \in \bigwedge^k X$ będzie prosty. Pokaż, że

$$T(\xi)^\perp = T(*\xi)\,.$$