1. **[Twierdzenie o rzędzie]** Niech $k, m, n, r \in \mathbb{Z} \cap [1, \infty)$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie otwarty, $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{rank} \mathrm{D}f(x) = r$ dla $x \in U$, $a \in U$, $j_n : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ oraz $j_m : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^m$ będą izometrycznymi zanurzeniami. Wtedy istnieją zbiory otwarte $V \subseteq U$ i $W \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz dyfeomorfizmy $g \in C^k(V, \mathbb{R}^m)$ i $h \in C^k(W, \mathbb{R}^n)$ takie, że $a \in V$, $f(a) \in W$ oraz
$$h \circ f \circ g^{-1}(x) = j_n \circ j_m^*(x) \quad \text{dla } x \in g[V] \,.$$

2. **[Definicja rozmaitości]** Niech $k, n, m \in \mathbb{Z}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $m \leqslant n$. Następujące warunki są równoważne:
   (a) M jest rozmaitością zanurzoną klasy C^k wymiaru m.
   (b) Dla każdego $p \in M$ istnieją zbióry otwarte $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq \mathbb{R}^m$ oraz funkcja różnowartościowa $f \in C^k(V, U)$ takie, że $p \in U$, $\operatorname{rank} \mathrm{D}f(x) = m$ dla $x \in V$ oraz $M \cap U = f[V]$.
   (c) Dla każdego $p \in M$ istnieją: zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^n$, podprzestrzeń liniowa $T \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz funkcja $f \in C^k(T, T^{\perp})$ takie, że $p \in U$, $M \cap U = \{x + f(x) : x \in T\} \cap U$.
   (d) Dla każdego $p \in M$ istnieje zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz funkcja $f \in C^k(U, \mathbb{R}^{n-m})$ takie, że $p \in U$, $\operatorname{rank} \mathrm{D}f(x) = n - m$ dla $x \in M \cap U$ oraz $M \cap U = f^{-1}\{f(p)\}$.

3. **[Miara powierzchniowa]** Niech $M \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie rozmaitością zanurzoną klasy C^k wymiaru m, zbiór I będzie co najwyżej przeliczalny, $V_i \subseteq \mathbb{R}^m$ będzie otwarty dla $i \in I$, $\psi_i \in C^k(V_i, \mathbb{R}^n)$ dla $i \in I$, $M \subseteq \bigcup_{i \in I} \psi_i[V_i]$, $M_i = M \cap \psi_i[V_i] \setminus \bigcup_{j<i} \psi_j[V_j]$ dla $i \in I$. Miara σ_m zbioru borelowskiego $A \subseteq M$ dana jest przez
$$\sigma_m(A) = \textstyle\sum_{i \in I} \int_{\psi_i^{-1}[M_i]} \det\big(\mathrm{D}\psi_i(x)^* \circ \mathrm{D}\psi_i(x)\big)^{1/2} \, \mathrm{d}\lambda_m(x) \,.$$

4. **[Wzór Cauchy'ego–Bineta]** Niech $m, n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $A \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $B \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $(u_1, \ldots, u_n)$ będzie bazą $\mathbb{R}^n$, $(v_1, \ldots, v_m)$ będzie bazą $\mathbb{R}^m$, S będzie zbiorem wszystkich funkcji rosnących typu $\{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, $j_s \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ będzie dana przez $j_s(v_i) = u_{s(i)}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ oraz $s \in S$. Wówczas
$$\det(B \circ A) = \textstyle\sum_{s \in S} \det(B \circ j_s) \cdot \det(j_s^* \circ A) \,.$$

---

1. Niech $k, n, m \in \mathbb{N}$, $m \leqslant n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Pokaż, że następujące warunki są równoważne:
   (a) M jest rozmaitością zanurzoną klasy C^k wymiaru m.
   (b) Dla każdego $p \in M$ istnieje zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dyfeomorfizm $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$ oraz m-wymiarowa podprzestrzeń liniowa $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ takie, że $p \in U$ oraz
$$f[M \cap U] = Z \cap \operatorname{im} f \,.$$
   (c) Dla każdego $p \in M$ istnieje zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^n$, liczba naturalna $l \geqslant n - m$ oraz funkcja $f \in C^k(U, \mathbb{R}^l)$ takie, że $p \in U$,
$$M \cap U = f^{-1}\{f(p)\} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{rank} \mathrm{D}f(x) = n - m \quad \text{dla } x \in U \,.$$

2. Udowodnij, że jeśli k, n, m, M, p, U, l, f są takie jak w 1c, to przestrzeń styczna do M w punkcie $a \in U \cap M$ jest równa $\ker \mathrm{D}f(a)$.

3. Niech $n \in N$, $n \geqslant 1$, $I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ będzie dana przez $I(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}^n$ oraz

$$\mathbf{O}(n) = \Big\{A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : A^* \circ A = I\Big\}.$$

Wykaż, że $\mathbf{O}(n)$ jest rozmaitością zanurzoną klasy C^∞. Określ wymiar $\mathbf{O}(n)$ i opisz równaniami przestrzeń styczną do $\mathbf{O}(n)$ w dowolnym punkcie $A \in \mathbf{O}(n)$.

4. Niech $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, $B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, $I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ będą takie, że $I(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}^k$ oraz $B \circ A = I$. Pokaż, że istnieje izometryczne włożenie $j \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ takie, że $j \circ j^* \circ A = A$. Wywnioskuj, że

$$\det(A^* \circ A) = \det(j^* \circ A)^2 \quad \text{oraz} \quad \det(B \circ B^*) \det(A^* \circ A) = 1\,.$$

Uwaga. Jest to część dowodu, że definicja miary powierzchniowej nie zależy od wyboru parametryzacji.

5. Niech przekształcenie $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ będzie samosprzężone (tj. $A^* = A$) oraz takie, że przekształcenie dwuliniowe $(u, v) \mapsto \langle u, Av\rangle$ dla $u, v \in \mathbb{R}^n$ jest nieujemnie określone. Rozstrzygnij, czy musi istnieć $B \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ takie, że $A = B^* \circ B$?

6. Oblicz długość okręgu $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ korzystając z definicji miary powierzchniowej oraz dwóch różnych parametryzacji:

$$\varphi(t) = (\cos t, \sin t) \quad \text{dla } t \in (0, 2\pi)\,;$$
$$\psi_1(t) = (t, \sqrt{1 - t^2}) \quad \text{i} \quad \psi_1(t) = (t, -\sqrt{1 - t^2}) \quad \text{dla } t \in (-1, 1)\,.$$

7. Oblicz długość krzywej $C = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in (0, 4\pi)\}$. Następnie oblicz całkę $\int_C f \,\mathrm{d}\sigma_1$ dla $f(x, y, z) = \cos z$ oraz $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

8. Oblicz pole powierzchni $S = \{(r \cos t, r \sin t, t) : r \in (0, 1),\ t \in (0, 4\pi)\}$.

9. Rozważmy funkcję $\Phi : (0, 2\pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ daną wzorem

$$\Phi(u, v) = \Big(\Big(1 + \tfrac{v}{2} \cos \tfrac{u}{2}\Big) \cos u,\ \Big(1 + \tfrac{v}{2} \cos \tfrac{u}{2}\Big) \sin u,\ \tfrac{v}{2} \sin \tfrac{u}{2}\Big)\,.$$

Udowodnij, że Φ jest parametryzacją pewnej rozmaitości wymiaru 2. Następnie oblicz pole tej powierzchni. Co to za rozmaitość?

10. Znajdź miarę zbioru

$$\Big\{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2 < 1\Big\}\,.$$

11. Niech $a \in (0, \infty)$. Znajdź pole powierzchni opisnej wzorem

$$\Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : az = xy,\ x^2 + y^2 \leqslant a^2\Big\}.$$

12. Oblicz całkę $\int_M f \, \mathrm{d}\sigma_1$, gdzie

$$M = \Big\{(t, \tfrac{2}{3}t^{3/2}, t) : t \in [1, 2]\Big\} \quad \text{oraz} \quad f(x, y, z) = \frac{x + y}{y + z}.$$

13. Niech $C \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie rozmaitością wymiaru 1 klasy C^1 oraz $f : C \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dodatnią i ciągłą. Wykaż, że zbiór

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C,\ 0 < z < f(x, y)\Big\}$$

jest rozmaitością klasy C^1 wymiaru 2 oraz

$$\sigma_2(S) = \int_C f \, \mathrm{d}\sigma_1 .$$

14. Niech $K \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ będzie rozmaitością zanurzoną klasy C^1 wymiaru 1 i niech $\tau(v)$ oznacza jednostkowy wektor styczny do K w punkcie v (jeden z dwóch możliwych; bez znaczenia który). Załóżmy ponadto, że

$$|\langle \tau(v), v \rangle| < \|v\| \quad \text{oraz} \quad \{tv : t \in (0, \infty)\} \cap K = \{v\} \quad \text{dla } v \in K .$$

Definiujemy zbiór C wzorem

$$C = \Big\{tv : v \in K,\ t \in (0, 1)\Big\}.$$

Wykaż, że C jest rozmaitością klasy C^1 wymiaru 2 oraz zachodzi wzór

$$\sigma_2(C) = \frac{1}{2} \int_K \|v \times \tau(v)\| \, \mathrm{d}\sigma_1(v) .$$

Zadania dodatkowe

15. Niech $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ będzie dana przez $I(x) = x$ dla $x \in \mathbb{R}^n$. Pokaż, że istnieje liczba $\varepsilon > 0$ taka, że funkcja $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(t) = \det(I + tA)$ jest dobrze określona i klasy C^∞. Następnie udowodnij, że

$$f'(0) = \operatorname{trace} A .$$

16. Niech $n \in N$, $n \geqslant 1$. Definiujemy

$$\mathbf{SL}(n) = \left\{ A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \det A = 1 \right\}.$$

Udowodnij, że $\mathbf{SL}(n)$ jest rozmaitością zanurzoną klasy C^∞. Opisz równaniami przestrzeń styczną do $\mathbf{SL}(n)$ w punkcie I, a następnie w dowolnym punkcie $A \in \mathbf{SL}(n)$.

17. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ będą takie, że układ wektorów $(b - a, c - a, d - a)$ jest liniowo niezależny. Wówczas istnieje dokładnie jedna sfera dwuwymiarowa S zawierająca wszystkie punkty a, b, c i d. Pokaż, że $x = (x_1, x_2, x_3) \in S$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \|x\|^2 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & \|d\|^2 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \|c\|^2 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \|b\|^2 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \|a\|^2 & 1 \end{bmatrix} = 0\,.$$

Niech $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, X, Y będą przestrzeniami liniowymi, $\dim X = n$. Niech $A^k(X, Y)$ oznacza przestrzeń liniową złożoną z antysymetrycznych przekształceń k-liniowych typu $X \times \cdots \times X \to Y$. Jeśli $Y = \mathbb{R}$ będziemy pisać po prostu $A^k X$. Jeśli $k = 0$, to $A^0 X = \mathbb{R}$, a jeśli $k = 1$, to $A^1 X = X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{R})$. Oznaczmy przestrzeń dualną do $A^k X$ przez $\bigwedge^k X = (A^k X)^* = \mathrm{Hom}(A^k X, \mathbb{R})$.

18. Wybierzmy bazę $v_1, \ldots, v_n$ przestrzeni X oraz bazę dualną $\omega_1, \ldots, \omega_n$ przestrzeni $X^* = A^1 X$. Niech $\Lambda(n, k)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji rosnących typu $\{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, n\}$.

    (a) Pokaż, że $\dim A^k X = \dim \bigwedge^k X = \#\Lambda(n, k) = \binom{n}{k}$.

    (b) Ponumerujmy wektory bazowe przestrzeni $A^k X$ i $\bigwedge^k X$ elementami $\Lambda(n, k)$: jeśli $s \in \Lambda(n, k)$ to odpowiadający wektor z bazy $\bigwedge^k X$ nazwiemy v_s, zaś wektor z bazy dualnej nazwiemy $\omega_s \in A^k X$.

    (c) Zauważ, że istnieje dokładnie jedno $\mu \in A^k(X, \bigwedge^k X)$ spełniające

    $$\mu(v_{s(1)}, \ldots, v_{s(k)}) = v_s \quad \text{dla } s \in \Lambda(n, k)\,.$$

    Jeśli $u_1, \ldots u_k \in X$, to będziemy pisać $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k = \mu(u_1, \ldots, u_k)$.
    Niech $u_i = \sum_{j=1}^n u_{i,j} v_j$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ i pewnych liczb $u_{i,j}$. Wyznacz współrzędne wektora $u_1 \wedge \cdots \wedge u_k$ w bazie $\{v_s : s \in \Lambda(n, k)\}$.

    (d) Pokaż, że dla każdego $g \in A^k(X, Y)$ istnieje dokładnie jedno $\bar{g} \in \mathrm{Hom}(\bigwedge^k X, Y)$ takie, że $g = \bar{g} \circ \mu$. Zatem istnieje naturalna bijekcja $A^k(X, Y) \simeq \mathrm{Hom}(\bigwedge^k X, Y)$. Zwykle utożsamiamy g z $\bar{g}$.

(e) Pokaż, że dla każdego $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $\bigwedge^k f : \bigwedge^k X \to \bigwedge^k Y$ takie, że dla $s \in \Lambda(n, k)$ zachodzi

$$\bigwedge^k f(v_s) = \mu(f(v_{s(1)}), \dots, f(v_{s(k)})) = f(v_{s(1)}) \wedge \dots \wedge f(v_{s(k)}) \,.$$

(f) Niech $f \in \mathrm{Hom}(X, X)$. Zauważ, że $\dim \bigwedge^n X = 1$, więc $\bigwedge^n f$ jest liniowym przekształceniem typu $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a zatem jest mnożeniem przez pewną stałą. Pokaż, że tą stałą jest wyznacznik f, czyli

$$\bigwedge^n f(w) = (\det f) \cdot w \quad \text{dla } w \in \bigwedge^n X \,.$$