Definicja. Niech μ będzie miarą na zbiorze X oraz $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Zakładamy ponadto, że X jest sumą przeliczalnie wielu zbiorów μ-mierzalnych o skończonej mierze. Definiujemy

$$\|f\|_p = \left(\textstyle\int |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \quad \text{dla } p < \infty \text{ oraz} \quad \|f\|_\infty = \inf\{t \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) = 0\}\,.$$

Przestrzeń $L^p(\mu)$ to zbiór funkcji μ-mierzalnych $f : X \to \mathbb{R}$ takich, że $\|f\|_p < \infty$.

Twierdzenie. *Dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ funkcja $\|\cdot\|_p$ jest półnormą na $L^p(\mu)$, a po utożsamieniu funkcji różniących się na zbiorze μ-miary zero $L^p(\mu)$ staje się przestrzenią Banacha, tj. zupełną unormowaną przestrzenią liniową.*

Definicja. Niech $f, g \in L^1(\lambda_n)$. Definiujemy *splot* $f \star g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kładąc

$$f \star g(x) = \int f(y) g(x-y) \,\mathrm{d}\lambda_n(y)\,.$$

Twierdzenie. *Jeśli $f, g \in L^1(\lambda_n)$ oraz φ_ε jest jedynką aproksymatywną, to*
1. *$f \star g \in L^1(\lambda_n)$;*
2. *$\|f \star g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$;*
3. *$f \star g = g \star f$;*
4. *$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|\varphi_\varepsilon \star f - f\|_1 = 0$;*
5. *jeśli f jest ciągła, to $\varphi_\varepsilon \star f$ zbiega przy $\varepsilon \downarrow 0$ do f niemal jednostajnie.*

Definicja. Niech μ będzie miarą na zbiorze X oraz $f \in L^1(\mu)$. Definiujemy zbiór domknięty $\operatorname{spt} f \subseteq X$, zwany *nośnikiem funkcji f*, wzorem

$$\operatorname{spt} f = X \setminus \bigcup \left\{U : U \subseteq X \text{ jest otwarty oraz } \textstyle\int_U f \,\mathrm{d}\mu = 0\right\}.$$

Definicja. Symbolem $C_c^k(\mathbb{R}^n)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ klasy C^k takich, że nośnik f jest zwarty.

---

1. Niech $f, g, h \in L^1(\lambda_n)$. Pokaż, że $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$.

2. Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n-mierzalna i nieujemna. Załóżmy, że $\int \varphi \,\mathrm{d}\lambda_n = 1$ oraz $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) > 0\} \subseteq \mathbf{B}(0,1)$. Dla $\varepsilon > 0$ kładziemy $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$ oraz $f_\varepsilon = f \star \varphi_\varepsilon$. Pokaż, że

   (a) $\int \varphi_\varepsilon \,\mathrm{d}\lambda_n = 1$ dla każdego $\varepsilon > 0$;

   (b) $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_\varepsilon(x) > 0\} \subseteq \mathbf{B}(0, \varepsilon)$ dla każdego $\varepsilon > 0$;

   (c) $\|f_\varepsilon\|_1 \leqslant \|f\|_1$ dla każdego $\varepsilon > 0$;

   (d) jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to f_ε zbiega do f niemal jednostajnie przy $\varepsilon \downarrow 0$.

   (e) jeśli $f \in L^1(\lambda_n)$, to $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|f_\varepsilon - f\|_1 = 0$.

3. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie λ_1-całkowalna na każdym przedziale ograniczonym. Kładziemy $F(x) = \int_0^x f \,\mathrm{d}\lambda_1$ oraz $F_h(x) = h^{-1}(F(x+h) - F(x))$ dla $x, h \in \mathbb{R}$. Pokaż, że $\lim_{h \to 0} \|F_h - f\|_1 = 0$.

4. Niech $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem, a $f \in L^1(\lambda_n)$ ma zwarty nośnik. Pokaż, że funkcja $f \star P$ jest dobrze określona i jest wielomianem.

5. **[Twierdzenie Weierstrassa]** Dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy $T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem

$$T_n(x) = \begin{cases} c_n(1 - \|x\|^2)^n & \text{dla } x \in \mathbf{B}(0,1) \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{B}(0,1)\,, \end{cases}$$

gdzie $c_n^{-1} = \int_{\mathbf{B}(0,1)}(1-\|x\|^2)^n \,\mathrm{d}\lambda_n(x)$. Niech $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ ma nośnik zawarty w $\mathbf{B}(0, \frac{1}{2})$.

(a) Pokaż, że $(f \star T_n)|_{\mathbf{B}(0,\frac{1}{2})}$ jest wielomianem dla $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pokaż, że $f \star T_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ jednostajnie na kuli $\mathbf{B}(0, \frac{1}{2})$.

(c) Wywnioskuj, że jeśli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zwarty, to każdą funkcję ciągłą $K \to \mathbb{R}$ można jednostajnie przybliżać wielomianami.

6. Niech $p \in [1, \infty)$ i $k \in \mathbb{N}$. Pokaż, że $L^p(\lambda_n) \cap C_c^0(\mathbb{R}^n)$ jest gęstą podprzestrzenią liniową w $L^p(\lambda_n)$.

Uwaga. Funkcje ciągłe i ograniczone na $\mathbb{R}^n$ *nie są* gęste w $L^\infty(\lambda_n)$ gdyż jednostajna granica ciągu funkcji ciągłych musi być ciągła.

7. Niech $p \in [1, \infty)$ oraz $f \in L^p(\lambda_n)$. Definijuemy funkcję $\tau : \mathbb{R}^n \to L^p(\lambda_n)$ wzorem $\tau(v)(x) = f(x + v)$. Pokaż, że τ jest jednostajnie ciągła.

Wskazówka. Można skorzystać z zadania 6.

8. **[Nierówność Höldera]** Niech $p, q \in [1, \infty]$ spełniają $1/p + 1/q = 1$ oraz $f \in L^p(\mu)$ i $g \in L^q(\mu)$. Pokaż, że $\int fg \,\mathrm{d}\mu \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$.

9. Niech $p, q, r \in [1, \infty]$ będą takie, że $1/p + 1/q + 1/r = 2$ oraz $f \in L^p(\lambda_n)$, $g \in L^q(\lambda_n)$, $h \in L^r(\lambda_n)$. Pokaż, że

$$\int\int f(x)g(x-y)h(y)\,\mathrm{d}\lambda_n(x)\,\mathrm{d}\lambda_n(y) \leqslant \|f\|_p\|g\|_q\|h\|_r\,.$$

Wskazówka. $|ABC| = (|A|^p|B|^q)^{1-1/r}(|A|^p|C|^r)^{1-1/q}(|B|^q|C|^r)^{1-1/p}$ dla $A, B, C \in \mathbb{R}$.

10. **[Nierówność Younga dla splotu]** Niech $p, q, s \in [1, \infty]$, $g \in L^q(\lambda_n)$, $h \in L^r(\lambda_n)$ oraz $1/q + 1/r = 1 + 1/s$. Wykaż, że

$$\|g \star h\|_s \leqslant \|g\|_q\|h\|_r\,.$$

Wskazówka. Skorzystaj z zadania 9. Jeśli $s < \infty$, przymij $p = s/(s-1)$ i zauważ, że jeśli $f \in L^s(\lambda_n)$, to istnieje $F \in L^p(\lambda_n)$ taka, że $\|f\|_s = \int f(x)F(x)\,\mathrm{d}\lambda_n(x)$. Jak wygląda F?

11. Niech $p, q \in [1, \infty]$ spełniają $1/p + 1/q = 1$, $g \in L^p(\lambda_n)$ oraz $f \in L^q(\lambda_n)$. Pokaż, że funkcja $f \star g$ jest dobrze określoną funkcją ciągłą.

    Wskazówka. Użyj nierówności Höldera i zadania 7.

12. Niech $p \in [1, \infty)$, $f \in L^p(\lambda_n)$ oraz $\varphi \in L^1(\lambda_n)$ spełnia $\|\varphi\|_1 = 1$. Dla $\varepsilon > 0$ kładziemy $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Pokaż, że $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|f \star \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0$.

    Uwaga. Dowodzi to, że $L^p(\lambda_n) \cap C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest gęstą podprzestrzenią w $L^p(\lambda_n)$.

    Uwaga. Przestrzeń $L^\infty(\lambda_n) \cap C^0(\mathbb{R}^n)$ *nie jest* gęstą podprzestrzenią w $L^\infty(\lambda_n)$.

    Wskazówka. Ten sam dowód co dla L^1 plus nierówność Younga.

13. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i ograniczona, zaś $\varphi \in L^1(\lambda_n)$ spełnia $\|\varphi\|_1 = 1$ oraz $\varphi \geqslant 0$. Dla $\varepsilon > 0$ kładziemy $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Pokaż, że $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\varphi_\varepsilon \star f)(x) = f(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$.

14. Niech $f_\delta(x) = \delta/2 \exp(-\delta|x|)$ dla $\delta > 0$ oraz $x \in \mathbb{R}$. Wykaż, że jeśli $g \in L^1(\lambda_1)$, to
$$\lim_{\delta\to\infty} \|f_\delta \star g - g\|_1 = 0\,.$$

    Wskazówka. Skorzystaj z zadania 12.

15. Niech $p, q \in [1, \infty]$ będą takie, że $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p(\lambda_n)$, $g \in L^1(\lambda_n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$. Załóżmy ponadto, że pochodna $\mathrm{D}g : \mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ jest taka, że $\mathrm{D}g(\cdot)e \in L^q(\lambda_n)$ dla każdego $e \in \mathbb{R}^n$. Pokaż, że funkcja $f \star g$ jest klasy C^1 oraz $\mathrm{D}(f \star g)(\cdot)e = f \star \mathrm{D}g(\cdot)e$ dla każdego $e \in \mathbb{R}^n$.

    Wskazówka. Użyj zadania 11 oraz zadania 27 z Tematu 1.

16. Niech $f \in L^1(\lambda_1)$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $\varphi(x) = (1 + x^2)^{-1}$. Dla $y > 0$ kładziemy $\varphi_y(x) = y^{-1}\varphi(x/y)$. Definiujemy $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ oraz $u : H \to \mathbb{R}$ wzorem $u(x, y) = \pi^{-1}(f \star \varphi_y)(x)$. Pokaż, że

    (a) u jest klasy C^∞;

    (b) $\Delta u = D^{(2,0)}u + D^{(0,2)}u = 0$;

    (c) jeśli f jest ciągła, to $\lim_{y\downarrow 0} u(x, y) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

    Uwaga. Funkcja u jest rozwiązaniem równania Laplace'a w H (operator różniczkowy Δ to tzw. *Laplasjan*) z warunkiem brzegowym danym przez f. Funkcje spełniające $\Delta u = 0$ nazywamy *funkcjami harmonicznymi*. Funkcja φ_y to tzw. *jądro Poissona.*

17. Dla $\mu \in (0, 1]$ definiujemy $\varphi_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem $\varphi_\mu(x) = |x|^{n(\mu-1)}$. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty i ograniczony, a $f : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie λ_n-całkowalna. Przedłużamy f do funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kładąc $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Definiujemy $V_\mu f = f \star \varphi_\mu$.

(a) Pokaż, że

$$\int_{\mathbf{B}(0,R)} \varphi_\mu \,\mathrm{d}\lambda_n = \mu^{-1}\boldsymbol{\alpha}(n)R^n \quad \text{dla } R \in (0,\infty)\,,$$

gdzie $\boldsymbol{\alpha}(n) = \lambda_n(\mathbf{B}(0,1))$.

(b) Pokaż, że $V_\mu \mathbb{1}_\Omega(x) \leqslant \mu^{-1}\boldsymbol{\alpha}(n)^{1-\mu}\lambda_n(\Omega)^\mu$ dla $x \in \Omega$.

Wskazówka. Znajdź $R > 0$ takie, że $\lambda_n(\Omega) = \boldsymbol{\alpha}(n)R^n$.

(c) Niech $q, r, s \in [1,\infty)$ będą takie, że $1/q + 1/r = 1 + 1/s$. Kładziemy $\delta = 1/q - 1/s \in [0,1)$ oraz wybieramy $\mu \in (0,1]$ takie, że $\mu > \delta$. Załóżmy, że $f \in L^q(\lambda_n)$. Pokaż, że

$$\|V_\mu f\|_s \leqslant \left(\frac{1-\delta}{\mu-\delta}\right)^{1-\delta} \boldsymbol{\alpha}(n)^{1-\mu}\lambda_n(\Omega)^{\mu-\delta}\|f\|_q\,.$$

Wskazówka. Nierówność Younga dla splotu.

18. **[Nierówność Poincaré]** Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty i ograniczony, $d = \sup\{|x - y| : x, y \in \Omega\}$, $u \in C^1(\Omega)$, $S \subseteq \Omega$ będzie λ_n-mierzalny i taki, że $\lambda_n(S) > 0$. Pokaż, że dla $x \in \Omega$ zachodzi

$$\left|u(x) - \fint_S u \,\mathrm{d}\lambda_n\right| \leqslant \frac{d^n}{n\lambda_n(S)} \int_\Omega \frac{\|\mathrm{D}u(y)\|}{|x-y|^{n-1}} \,\mathrm{d}\lambda_n(y) = \frac{d^n}{n\lambda_n(S)} V_{1/n}\|\mathrm{D}u(\cdot)\|(x)\,.$$

Wywnioskuj, że dla $p \in [1,\infty)$ zachodzi

$$\left\|u(x) - \fint_S u \,\mathrm{d}\lambda_n\right\|_p \leqslant \frac{\boldsymbol{\alpha}(n)^{1-1/n}\lambda_n(\Omega)^{1/n}}{\lambda_n(S)} d^n \|\mathrm{D}u\|_p\,.$$

Uwaga. Symbol $\fint_S u \,\mathrm{d}\lambda_n = \lambda_n(S)^{-1}\int_S u \,\mathrm{d}\lambda_n$ oznacza średnią z u na zbiorze S.

Wskazówki.

(a) bez straty ogólności można założyć, że $x = 0$;

(b) przedstaw $u(x) - u(y)$ jako całkę z pochodnej;

(c) rozszerz $W(z) = \|\mathrm{D}u(z)z/|z|\|$ do funkcji $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kładąc zero na zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$;

(d) skorzystaj z zadania 18(b) z Tematu 2 by zamienić całkę po kuli na całkę podwójną, t.j. dla $s \in (0,\infty)$ zachodzi

$$\int_{\mathbf{B}(0,d)} \|\mathrm{D}u(s\tfrac{z}{|z|})\tfrac{z}{|z|}\| \,\mathrm{d}\lambda_n(z) = \int_0^d r^{n-1} \int_{\partial\mathbf{B}(0,1)} \|\mathrm{D}u(sw)w\| \,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(w)\,\mathrm{d}\lambda_1(r)\,,$$

gdzie $\mathscr{H}^{n-1} \llcorner \partial\mathbf{B}(0,1)$ pokrywa się z miarą powierzchniową na sferze.

19. **[Transformata Laplace'a]** Niech $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie λ_1-całkowalna. Kładziemy $\mathcal{L}f(x) = \int_0^\infty f(t)e^{-tx}\,\mathrm{d}\lambda_1(t)$. Pokaż, że $\mathcal{L}f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞.

20. Niech $f, g \in L^1(\lambda_n)$. Pokaż, że

$$\operatorname{spt}(f \star g) \subseteq \operatorname{spt} f + \operatorname{spt} g = \{x + y : x \in \operatorname{spt} f,\ y \in \operatorname{spt} g\}\,.$$

W szczególności, jeśli $\operatorname{spt} f \subseteq \mathbf{B}(0, r)$, to $\operatorname{spt}(f \star g) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \operatorname{spt} g) \leqslant r\}$.

21. Niech $f_0 = \mathbb{1}_{[0,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $f_{n+1} = f_n \star f_0$ dla $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Wyznacz $\operatorname{spt} f_n$.
    (b) Pokaż, że $f_n(x) > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in (0, n + 1)$.
    (c) Pokaż, że $f_n \in C^{n-1}(\mathbb{R})$.
    (d) Pokaż, że $f_n|_{I_k}$ jest wielomianem dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, gdzie $I_k = (k, k + 1)$.

22. Niech $f \in L^1(\lambda_n)$ będzie taka, że

$$\int f \cdot g \,\mathrm{d}\lambda_n = 0$$

dla każdej funkcji gładkiej $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ o zwartym nośniku. Pokaż, że $f(x) = 0$ dla λ_n-prawie wszystkich x.

23. Niech $f \in L^1(\lambda_n)$ będzie taka, że

$$\int f \cdot g \,\mathrm{d}\lambda_n = 0$$

dla każdej funkcji gładkiej $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ o zwartym nośniku spełniającej

$$\int g \,\mathrm{d}\lambda_n = 0\,.$$

Pokaż, że istnieje stała $c > 0$ taka, że $f(x) = c$ dla λ_n-prawie wszystkich x.

24. Niech $k \in \mathbb{N}$ zaś $f \in L^1(\lambda_n)$ będzie taka, że

$$\int_{\mathbf{B}(0,1)} f \cdot g \,\mathrm{d}\lambda_n = 0$$

dla każdej funkcji gładkiej $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ spełniającej

$$\int_{\mathbf{B}(0,1)} g \cdot P \,\mathrm{d}\lambda_n = 0 \quad \text{dla każdego wielomianu } P \text{ stopnia co najwyżej } k$$

Czy wynika stąd, że istnieje wielomian W stopnia co najwyżej k taki, że $f = W|_{\mathbf{B}(0,1)}$?