1. Oblicz całkę
$$\int_D x^2 + y^2 \,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)\,, \quad \text{gdzie } D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0\Big\}\,.$$

2. Oblicz średnią odległość punktu kuli jednostkowej od jej środka.

3. Oblicz całkę
$$\int_{\mathbf{B}(0,1)} y \exp(x^2) \sin(x^2+y^2) \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,.$$

4. Niech $A = (0,1) \times (0, \pi/2)$. Uzasadnij, że przekształcenie $\Phi : A \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem
$$\Phi(x,y) = \Big(u(x,y), v(x,y)\Big) = \Big(e^x \cos(y),\ e^x \sin(y)\Big)$$
jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Opisz obraz Φ, a następnie dokonaj zamiany zmiennych $(x,y) \mapsto \Phi(x,y)$ w całce
$$\int_A \frac{\exp(2x)}{1 + \exp(4x)\cos^2(y)\sin^2(y)} \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,.$$

5. Uzasadnij, że przekształcenie $\Phi : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ dane wzorem
$$\Phi(x,y) = \Big(u(x,y), v(x,y)\Big) = \Big(2xy,\ x^2 - y^2\Big)$$
jest dyfeomorfizmem na swój obraz. Opisz obraz Φ, a następnie dokonaj zamiany zmiennych $(x,y) \mapsto \Phi(x,y)$ w całce
$$\int \sqrt[3]{x^4 - 6x^2y^2 + y^4} \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,.$$

6. Oblicz całkę
$$\int_0^1 \int_0^{1-2\sqrt{x}+x} x + y + 2\sqrt{xy} \,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)$$
dokonując zamiany zmiennych $x = s\cos^4(t)$, $y = s\sin^4(t)$.

7. Oblicz całkę
$$\int_D x^2 + y^2 \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,, \quad \text{gdzie } D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 - y^2 < 4,\ 2 < xy < 4\Big\}\,.$$

   Wskazówka. Skorzystaj z zamiany zmiennych z zadania 5.

8. Znajdź środek masy półkuli
$$H = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant z,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\Big\}$$
jeśli jej gęstość wyraża się wzorem $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

9. Niech $A \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0\}$ będzie λ_2 mierzalny, a $B \subseteq \mathbb{R}^3$ zbiorem powstałym przez obrót A względem osi x-ów. Wykaż, że B jest λ_3 mierzalny oraz

$$\lambda_3(B) = 2\pi \int_A y \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,.$$

Uwaga. Wynika stąd, że jeśli $\int_A |x| + y \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y) < \infty$, to $\lambda_3(B)$ równa się iloczynowi $\lambda_2(A)$ przez długość okręgu zakreślonego przez środek ciężkości zbioru A. Jest to tzw. *reguła Guldina*.

10. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchnią opisaną wzorem

$$|\sqrt{x^2+y^2} - 4| + |z| = \sqrt{2}\,.$$

11. Znajdź środek ciężkości figury płaskiej opisanej układem nierówności

$$y > 9x^2 - 9\,, \quad y < 4x^2 - 4\,.$$

Następnie oblicz objętość bryły powstałej przez obrót tej figury wokół prostej o równaniu $y = 1$.

12. Oblicz objętość bryły powstałej w wyniku przecięcia dwóch nieskończonych walców o promieniu 1 i prostopadłych osiach.

13. Oblicz objętość bryły zawartej w zbiorze $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0\}$ i ograniczonej powierzchniami $2xy = 1$, $xy = 2$, $y = 2x$, $x = 2y$, $z = 0$, $yz = 1$.

14. Wyznacz wektor siły grawitacyjnej pochodzącej od kuli jednorodnej K działającej na punkt materialny a. Rozważ dwa przypadki: $a \in K$ oraz $a \in \mathbb{R}^3 \setminus K$.

Wskazówka. Na mocy prawa grawitacji Newtona wektor tej siły jest równy

$$C \int_K \frac{x-a}{|x-a|^3} \, \mathrm{d}\lambda_3(x)$$

gdzie liczba $C > 0$ jest proporcjonalna do iloczynu masy a przez gęstość masy kuli K.

Uwaga. Rozważmy kolejkę poruszającą się wyłącznie pod wpływem siły grawitacji przez tunel wywiercony w planecie (o jednostajnie rozłożonej gęstości!) wzdłuż prostej łączącej dowolnie wybrane punkty A i B na powierzchni. Wywnioskuj, że czas podróży z punktu A do B nie zależy od długości trasy.

---

15. Oblicz wartość średnią funkcji $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ na zbiorze $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < z + y + z\}$.

16. Niech $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ będzie izomorfizmem liniowym oraz $E \subseteq \mathbb{R}^k$ będzie zbiorem λ_k mierzalnym i ograniczonym. Wykaż, że obrazem przez L środka ciężkości zbioru E jest środek ciężkości obrazu $L[E]$.

17. Niech $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie ograniczoną funkcją ciągłą. Wykaż, że

$$\lim_{y \downarrow 0} \int_0^\infty \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \frac{\pi}{2} f(0) \, .$$

18. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie λ_1 całkowalna. Definiujemy $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $\varphi(y) = \int_y^{y+1} f(x) \, \mathrm{d}\lambda_1(x)$. Udowodnij, że φ jest λ_1 całkowalna oraz zachodzi równość $\int \varphi \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int f \, \mathrm{d}\lambda_1$.

Miara kuli jednostkowej w dowolnej przestrzeni Euklidesowej

19. Niech $n \in \mathbb{N}$ spełnia $n \geqslant 2$. Kładziemy

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \to \partial \mathbf{B}^n(0,1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \, , \quad & \Psi(z) = \Big(z, \sqrt{1 - \|z\|^2}\Big) \, , \\ \bar{\Psi} : \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \to \partial \mathbf{B}^n(0,1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \, , \quad & \bar{\Psi}(z) = \Big(z, -\sqrt{1 - \|z\|^2}\Big) \, , \\ \Phi : \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n \, , \quad & \Phi(z, r) = r \Psi(z) \, , \\ \bar{\Phi} : \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n \, , \quad & \bar{\Phi}(z, r) = r \bar{\Psi}(z) \, , \end{aligned}$$

(a) Pokaż, że istnieje funkcja wymierna $D : \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \to [0, \infty)$ taka, że

$$|\det \mathrm{D}\bar{\Phi}(z, r)| = |\det \mathrm{D}\Phi(z, r)| = r^{n-1} D(z) \quad \text{dla } z \in \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \text{ i } r \in (0, \infty) \, .$$

(b) Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n całkowalna. Pokaż, że

$$\int f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\mathbf{B}(0,1)} \Big(f(r\Psi(z)) + f(r\bar{\Psi}(z)) \Big) D(z) \, \mathrm{d}\lambda_{n-1}(z) \, \mathrm{d}r \, .$$

(c) Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n całkowalna. Kładziemy

$$S_r^{n-1}(f) = \int_{\mathbf{B}(0,1)} \Big(f(r\Psi(z)) + f(r\bar{\Psi}(z)) \Big) D(z) \, \mathrm{d}\lambda_{n-1}(z) \, .$$

Pokaż, że jeśli $f = \mathbb{1}_{\mathbf{B}^n(0,1)}$ jest funkcją charakterystyczną kuli jednostkowej, to

$$S_r^{n-1}(\mathbb{1}_{\mathbf{B}^n(0,1)}) = S_s^{n-1}(\mathbb{1}_{\mathbf{B}^n(0,1)}) \quad \text{dla } s, r \in (0,1) \, .$$

Możemy zatem zdefiniować liczbę $\sigma(n-1) = S_{1/2}^{n-1}(\mathbb{1}_{\mathbf{B}^n(0,1)})$.

(d) Niech $\boldsymbol{\alpha}(n) = \lambda_n(\mathbf{B}(0,1))$ będzie miarą jednostkowej kuli w $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\sigma(n-1) = n\boldsymbol{\alpha}(n)\,.$$

(e) Niech $\boldsymbol{\Gamma} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ oznacza funkcję gamma Eulera, tj.

$$\boldsymbol{\Gamma}(s) = \textstyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{dla } s \in (0,\infty)\,.$$

Pokaż, że

$$\boldsymbol{\Gamma}(s) = \textstyle\int_{-\infty}^\infty |x|^{2s-1}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{dla } s \in (0,\infty)\,.$$

(f) Dla $z \in (0,\infty)^n$ kładziemy

$$B(z) = \tfrac{1}{2}S_1^{n-1}\Big(x \mapsto \textstyle\prod_{j=1}^n |x_j|^{2z_j-1}\Big)\,.$$

Pokaż, że jeśli $z \in (0,\infty)^n$ to

$$\textstyle\prod_{j=1}^n \boldsymbol{\Gamma}(z_j) = B(z)\boldsymbol{\Gamma}(\sum_{j=1}^n z_j)\,.$$

(g) Zauważ, że $2B(\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}) = \sigma(n-1)$ i wywnioskuj, że

$$\boldsymbol{\alpha}(n) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^n}{\boldsymbol{\Gamma}(1+n/2)}\,.$$

W szczególności $\boldsymbol{\Gamma}(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Uwaga. Wartość $S_r^{n-1}(f)$ równa jest całce $\int_{\partial\mathbf{B}^n(0,1)} f(rz)\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(z)$, gdzie $\mathscr{H}^{n-1}$ jest tzw. $(n-1)$ *wymiarową miarą Hausdorffa w* $\mathbb{R}^n$. W szczególności $\sigma(n-1)$ jest równa mierze sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^n$, tj. $\sigma(n-1) = \mathscr{H}^{n-1}(\partial\mathbf{B}^n(0,1))$ oraz

$$\frac{\prod_{j=1}^n \boldsymbol{\Gamma}(z_j)}{\boldsymbol{\Gamma}(\sum_{j=1}^n z_j)} = B(z) = \frac{1}{2}\int_{\partial\mathbf{B}^n(0,1)} \prod_{j=1}^n |x_j|^{2z_j-1}\,\mathrm{d}\mathscr{H}^{n-1}(x)\,.$$

20. Niech Ψ, Φ oraz D będą jak w zadaniu 19. Pokaż, że

$$\begin{aligned} D(z)^2 &= \det\Big(\mathrm{D}\Psi(z)^* \circ \mathrm{D}\Psi(z)\Big) \\ &= \frac{1}{r^{2(n-1)}}\det\Big(\mathrm{D}\Phi(z,r)^* \circ \mathrm{D}\Phi(z,r)\Big) \quad \text{dla } z \in \mathbf{B}^{n-1}(0,1) \text{ i } r \in (0,\infty)\,. \end{aligned}$$

Wskazówka. Dla każdego $z \in \mathbf{B}^{n-1}(0,1)$ oraz $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ mamy $\mathrm{D}\Psi(z)u \perp \Psi(z)$ zatem $\mathrm{D}\Psi(z)^*\Psi(z) = 0$, a także $\|\Psi(z)\| = 1$.

21. Definiujemy

$$\phi_p(x_1,\dots,x_n) = \Big(|x_1|^{2/p}\operatorname{sgn}(x_1),\dots,|x_n|^{2/p}\operatorname{sgn}(x_n)\Big) \quad \text{dla } p \in (0,\infty)\,,$$

$$B_p = \Big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \textstyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p < 1\Big\} \quad \text{dla } p \in (0,\infty)\,,$$

$$X = \Big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \neq 0 \text{ dla } i = 1,2,\dots,n\Big\}\,.$$

(a) Pokaż $\phi_p|_X$ jest dyfeomorefizmem oraz $\phi_p[B_2] = B_p$.

(b) Wywnioskuj, że

$$\lambda_n(B_p) = \left(\frac{2}{p}\right)^n \frac{p}{n} B(1/p, \dots, 1/p) = 2^n \frac{\boldsymbol{\Gamma}(1+1/p)^n}{\boldsymbol{\Gamma}(1+n/p)} \,.$$

22. Niech $p \in \mathbb{R}$ oraz $k \in \mathbb{N}$ będą takie, że $p < k$. Oblicz całkę

$$\int_{\mathbf{B}^k(0,1)} \frac{1}{\|x\|^p} \,\mathrm{d}\lambda_k(x) \,.$$

Wskazówka. Skorzystaj z zadania 19

23. Niech $p > -1$ oraz $v \in \mathbb{R}^n$ spełnia $\|v\| = 1$. Pokaż, że

$$S_1^{n-1}(x \mapsto |\langle x, v\rangle|^p) = \frac{2\boldsymbol{\Gamma}((p+1)/2)\boldsymbol{\Gamma}(1/2)^{n-1}}{\boldsymbol{\Gamma}((p+m)/2)} \,.$$

Wskazówka. Przez niezmienniczość na obroty (tj. wybierając odpowiednio bazę w $\mathbb{R}^n$) można założyć, że $v = (1, 0, \dots, 0)$. Popatrz na $B((p+1)/2, 1/2, \dots, 1/2)$.

24. Niech $X = \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ będzie przestrzenią liniową wszystkich przekształceń liniowych typu $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. Na X wprowadzamy iloczyn skalarny

$$f \bullet g = \operatorname{trace}(f^* \circ g) \quad \text{oraz normę} \quad |f| = \sqrt{f \bullet f} \quad \text{dla } f \in X \,.$$

Pokaż, że

$$|f|^2 = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}(n)} \int_{\mathbf{B}^n(0,1)} f \bullet f \,\mathrm{d}\lambda_n(x) = \frac{n}{\boldsymbol{\alpha}(n)} \int_{\mathbf{B}^n(0,1)} \|f(x)\|^2 \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \,.$$

Wskazówka. Niech $g = f^* \circ f$. Zauważ, że $\|f(x)\|^2 = \langle g(x), x\rangle$ oraz g jest symetryczne (samosprzężone) i dodatnio określone. Małe twierdzenie spektralne pozwala zatem znaleźć bazę ortonormalną $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ taką, że $g(v_i) = \lambda_i^2 v_i$ dla wszystkich $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ i pewnych liczb $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Wówczas $f \bullet f = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$. Dalej należy skorzystać z zadań 19 oraz 23.