Twierdzenie (Fubiniego [?, 5.24]). *Niech* $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$ *będzie* λ_{n+m}*-całkowalna lub* λ_{n+m}*-mierzalna i nieujemna. Wówczas*

1. *dla* λ_n *prawie wszystkich* $x \in \mathbb{R}^n$ *funkcja* $\mathbb{R}^m \ni y \mapsto f(x, y)$ *jest* λ_m*-mierzalna;*
2. *dla* λ_m *prawie wszystkich* $y \in \mathbb{R}^m$ *funkcja* $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto f(x, y)$ *jest* λ_n*-mierzalna;*
3. *funkcja* $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \int f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda_m(y)$ *jest* λ_n*-mierzalna;*
4. *funkcja* $\mathbb{R}^m \ni y \mapsto \int f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda_n(x)$ *jest* λ_m*-mierzalna;*
5. *zachodzą równości*

$$\int \int f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda_n(x) \,\mathrm{d}\lambda_m(y) = \int \int f(x, y) \,\mathrm{d}\lambda_m(y) \,\mathrm{d}\lambda_n(x) = \int f \,\mathrm{d}\lambda_{m+n} \,.$$

Twierdzenie (o zamianie zmiennych [?, 5.22]). *Niech* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *będzie otwarty,* $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *będzie dyfeomorfizmem klasy* C^1*,* $f : \Phi[\Omega] \to \mathbb{R}$ *będzie* λ_n *całkowalna (*λ_n*-mierzalna i nieujemna). Wtedy* $(f \circ \Phi) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi|$ *jest* λ_n *całkowalna (*λ_n*-mierzalna) i zachodzi równość*

$$\int_{\Phi[\Omega]} f \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\Omega} (f \circ \Phi) \cdot |\det \mathrm{D}\Phi| \,\mathrm{d}\lambda_n \,.$$

---

1. Niech $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem o współczynnikach z przedziału $[0, 1]$, zaś $K \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie kwadratem $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Wykaż, że

$$\int_K P(xy) \,\mathrm{d}\lambda_2(x, y) \leqslant 8 \,.$$

   Czy można zmniejszyć stałą 8?

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie mierzalna i ograniczona. Kładziemy

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \cos(tx^2) \frac{f(x)}{1 + x^6} \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R} \,.$$

   Udowodnij, że g jest różniczkowalna i znajdź g'.

3. Wyznacz pochodne cząstkowe funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeśli

$$f(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \sin(u + v) x \,\mathrm{d}\lambda_1(x) \quad \text{dla } (u, v) \in \mathbb{R}^2 \,.$$

4. Definiujemy $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kładąc dla $t \geqslant 0$

$$f(x,t) = \begin{cases} x & \text{jeśli } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{t}\,, \\ -x + 2\sqrt{t} & \text{jeśli } \sqrt{t} < x \leqslant 2\sqrt{t}\,, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach}\,. \end{cases}$$

Dla $t < 0$ kładziemy $f(x,t) = -f(x,|t|)$. Pokaż, że f jest ciągła na $\mathbb{R}^2$ oraz $\mathrm{D}_2 f(x,0) = 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Określmy $g(t) = \int_{-1}^{1} f(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$. Pokaż, że $g(t) = t$ o ile $|t| < \frac{1}{4}$. Zatem

$$g'(0) \neq \int_{-1}^{1} \mathrm{D}_2 f(x,0)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,.$$

5. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2x,\ x^2 y \leqslant 16\}$. Wyznacz $\lambda_2(A)$. Czy funkcja $f(x,y) = xy$ jest całkowalna na A?

6. Niech $0 < b < a$. Oblicz całkę

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-ax) - \exp(-bx)}{x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,.$$

7. Oblicz miarę zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^k$ jeśli
   (a) $k = 2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2,\ 2y^2 < x < 3y^2\}$;
   (b) $k = 3$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4,\ z > 1\}$;
   (c) $k = 3$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ x^2 + y^2 < x\}$;
   (d) $A = \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{j=1}^k |\sum_{i=1}^k a_{j,i} x_i| < 1\}$ – $a_{j,i} \in \mathbb{R}$ ustalone;
   (e) $A = \{(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{R}^k : \sum_{j=1}^k (\sum_{i=1}^k a_{j,i} x_i)^2 < 1\}$ – $a_{j,i} \in \mathbb{R}$ ustalone;

8. Dane są $A \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz $f : A \to \mathbb{R}$. Oblicz całkę $\int_A f\,\mathrm{d}\lambda_2$ jeśli
   (a) $A = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < x)\}$ oraz $f(x,y) = x$;
   (b) $A = \mathbb{R}^2$ oraz $f(x,y) = \exp(-x^2 - xy - y^2)$;
   (c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$ oraz $f(x,y) = (1 - x + y)\exp(-x)$;
   (d) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < x < 1\}$ oraz $f(x,y) = 1/(x\sqrt{y})$;
   (e) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant y\}$ oraz $f(x,y) = x/\sqrt{x^2 + y^2}$;
   (f) A jest kwadratem o przekątnej łączącej punkty $(0,\pi)$ i $(\pi, 2\pi)$ oraz $f(x,y) = (x+y)^2 \cos^2(x-y)$;
   (g) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < 8y < 8x^2,\ y^2 < x < 8y^2\}$ oraz $f(x,y) = (x/y)^3$;
   (h) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < x^3\}$ oraz $f(x,y) = \exp(y/x)$;

(i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1,\ y < x < 1\}$ oraz $f(x,y) = \exp(-x^2)$;

(j) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi,\ x < y < \pi\}$ oraz $f(x,y) = (\sin y)/y$;

(k) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1,\ y < x < 1\}$ oraz $f(x,y) = 1/(1+x^4)$;

9. Niech $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2y,\ y < 2x,\ x+y < 1,\ 1 < 3x+y\}$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{\left(x^{2n} + y^{2n}\right)^{1/n}}{x^4 y} \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)\,.$$

10. Niech $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2+y^2 < 1,\ 0 < z < 2\}$. Wykaż, że granica

$$\lim_{n\to\infty} \int_A \frac{z}{n} \ln\Big((x^2+y^2)^n + (x^2+y^2)^{-n}\Big) \,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)\,.$$

istnieje i oblicz jej wartość.

11. Niech $k \in \mathbb{N}$ oraz $p \in \mathbb{R}$. Udowodnij, że

$$\int_{\mathbf{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^p} \,\mathrm{d}\lambda_k(x) < \infty \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad p < k\,,$$
$$\int_{\mathbb{R}^k\setminus\mathbf{B}(0,1)} \frac{1}{\|x\|^p} \,\mathrm{d}\lambda_k(x) < \infty \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad p > k\,.$$

Wskazówka. Przedstaw $\mathbf{B}(0,1)$ jako sumę przeliczalnie wielu „skorup" $A_l = \mathbf{B}(0,2^{-l})\setminus \mathbf{B}(0,2^{-l-1})$ dla $l = 0,1,2,\ldots$

12. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie λ_n-mierzalny, $p \in (0,\infty)$ oraz $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n-mierzalna. Wykaż, że

$$\int_A |f|^p \,\mathrm{d}\lambda_n = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_n\Big(\Big\{x \in A : |f(x)| > t\Big\}\Big) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)\,.$$

Wskazówka. Twierdzenie Fubiniego.

13. Niech $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie klasy C^1 i spełnia $\varphi(0) = 0$, zaś $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n całkowalna. Pokaż, że

$$\int \varphi(|f(x)|) \,\mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_0^\infty \varphi'(t)\lambda_n(\{x : |f(x)| > t\}) \,\mathrm{d}\lambda_1(t)\,.$$

14. Niech $p \in \mathbb{R}$ oraz $k \in \mathbb{N}$ będą takie, że $p < k$. Oblicz całkę

$$\int_{\mathbf{B}^k(0,1)} \frac{1}{\|x\|^p} \,\mathrm{d}\lambda_k(x)\,.$$

Wskazówka. Skorzystaj z zadania 12

15. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n całkowalna. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki zbiór zwarty $K \subseteq \mathbb{R}^n$, że $\int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |f| \, \mathrm{d}\lambda_n \leqslant \varepsilon$.

16. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n-całkowalna. Pokaż, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego zbioru λ_n-mierzalnego $A \subseteq \mathbb{R}^n$ spełniającego $\lambda_n(A) \leqslant \delta$ zachodzi $\int_A f \, \mathrm{d}\lambda_n \leqslant \varepsilon$.

    Wskazówka. Rozważ miarę μ daną przez całkowanie λ_n z gęstością zadaną przez $|f|$.

17. Oblicz
$$\int \exp(-x^2) \, \mathrm{d}\lambda_1(x) \,.$$

    Wskazówka. Oblicz kwadrat powyższego wyrażenia korzystając z twierdzenia Fubiniego i zamiany zmiennych.

18. Niech D będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym przez parabolę o równaniu $y = x^2$ oraz prostą o równaniu $x + y = 2$. Oblicz
$$\int_D 6x + 2y^2 \, \mathrm{d}\lambda_2(x, y) \,.$$

19. Niech D będzie zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$ ograniczonym krzywymi o równaniach $y = x^2$ oraz $y = x^3$. Oblicz
$$\int_D xy^2 \, \mathrm{d}\lambda_2(x, y) \,.$$

20. Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie mierzalny i taki, że $\lambda_n(A) > 0$. Udowodnij, że rzut ortogonalny A na dowolną k-wymiarową podprzestrzeń liniową $\mathbb{R}^n$ ma dodatnią miarę λ_k.

Twierdzenie (Łuzina [?, 17.12])**.** *Niech X będzie przestrzenią metryczną, μ skończoną miarą Borelowską na X, Y przestrzenią topologiczną spełniającą drugi aksjomat przeliczalności (przeliczalna baza topologii), $f : X \to Y$ będzie μ-mierzalna. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $F \subseteq X$ taki, że $\mu(X \setminus F) \leqslant \varepsilon$ oraz $f|_F$ jest ciągła. Jeśli X jest przestrzenią Polską (ośrodkowa i metryzowalna w sposób zupełny), to F może być zwarty.*

Definicja. Niech $J \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem oraz $f : J \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest *absolutnie ciągła* jeśli istnieje λ_1-mierzalna funkcja $g : J \to \mathbb{R}$ taka, że dla wszystkich $x, y \in J$ spełniających $y < x$ zachodzi

$$f(x) - f(y) = \int_y^x g(s) \, \mathrm{d}\lambda_1(s) \,. \tag{1}$$

Zadania dodatkowe

21. Pokaż, że jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest mierzalna oraz $\varepsilon > 0$, to istnieje funkcja ciągła $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że $\lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) \leqslant \varepsilon$.

22. Pokaż, że jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest całkowalna, (w szczególności $\int |f| \, d\lambda_n < \infty$) oraz $\varepsilon > 0$, to istnieje funkcja ciągła $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że $\int |f - g| \, d\lambda_n \leqslant \varepsilon$.

    Uwaga. Zbiór $L^1(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \ f \text{ jest } \lambda_n\text{-mierzalna oraz } \int |f| \, d\lambda_n < \infty\}$ jest przestrzenią liniową, a funkcja $f \mapsto \|f\|_{L^1} = \int |f| \, d\lambda_n$ jest półnormą. Powyższy wynik mówi, że zbiór $C^0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ jest gęsty w $L^1(\mathbb{R}^n)$.

23. Niech $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie λ_n-mierzalna i nieujemna. Załóżmy, że $\int \varphi \, d\lambda_n = 1$ oraz $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) > 0\} \subseteq \mathbf{B}(0, 1)$. Dla $\varepsilon > 0$ kładziemy $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Pokaż, że

    (a) $\int \varphi_\varepsilon \, d\lambda_n = 1$ dla każdego $\varepsilon > 0$;

    (b) $\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_\varepsilon(x) > 0\} \subseteq \mathbf{B}(0, \varepsilon)$ dla każdego $\varepsilon > 0$;

    (c) $\|f_\varepsilon\|_{L^1} \leqslant \|f\|_{L^1}$ dla każdego $\varepsilon > 0$;

    (d) jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int f(x)\varphi_\varepsilon(y - x) \, d\lambda_n(x) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}^n$;

    (e) jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest λ_n-całkowalna oraz $f_\varepsilon(x) = \int f(y)\varphi_\varepsilon(y - x) \, d\lambda_n(y)$, to

    $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|f_\varepsilon - f\|_{L^1} = 0\,.$$

24. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie λ_1 całkowalna i absolutnie ciągła, t.j., spełnia (1) dla pewnej $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dla $h \in \mathbb{R}$ kładziemy $f_h(x) = h^{-1}(f(x + h) - f(x))$. Pokaż, że

    $$\lim_{h \downarrow 0} \|f_h - g\|_{L^1} = 0\,.$$

25. Niech ciąg $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcji λ_n całkowalnych zbiega do pewnej funkcji $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w L^1, tzn. $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{L^1} = 0$. Pokaż, że ciąg f_n *nie musi* zbiegać λ_n prawie wszędzie.

26. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie absolutnie ciągła oraz różniczkowalna λ_1 prawie wszędzie. Pokaż, że wówczas $\lambda_1(\{x \in [a, b] : f'(x) \neq g(x)\}) = 0$, tzn. ilorazy różnicowe f_h zbiegają λ_1 prawie wszędzie do funkcji g.

    Uwaga. Faktem jest, że każda funkcja absolutnie ciągła jest λ_1 prawie wszędzie różniczkowalna lecz dowód tego faktu przekracza możliwości zajęć z AM II.2; zob. [**?**, 2.9.20] lub [**?**, 2.14].

27. Niech $f : [0, 1] \to [0, 1]$ będzie funkcją schodkową Cantora. Czy f jest różniczkowalna λ_1 prawie wszędzie? Czy f jest absolutnie ciągła?

28. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie λ_n-mierzalny oraz $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Załóżmy, że

    - f jest λ_{n+1} całkowalna,

- $f(x,\cdot)$ jest absolutnie ciągła dla λ_n prawie wszystkich $x \in \Omega$,
- $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ istnieje dla λ_{n+1} prawie wszystkich $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$,
- $(x,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ jest λ_{n+1} całkowalna.

Definiujemy funkcję $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(t) = \int_\Omega f(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_n(x) \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Pokaż, że F jest absolutnie ciągła.

(b) Dla $t \in \mathbb{R}$ kładziemy

$$g(t) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_n(x)\,.$$

Pokaż, że jeśli g jest ciągła w punkcie $t \in \mathbb{R}$, to

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega f(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_n(x) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,\mathrm{d}\lambda_n(x) = g(t)\,. \tag{2}$$

(c) Pokaż, że jeśli funkcja $(x,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)$ jest ciągła i ma zwarty nośnik, to g jest ciągła; zatem (2) zachodzi dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Uwaga. Z tego, że F jest absolutnie ciągła wynika, że $F'(t) = g(t)$ dla λ_1 prawie wszystkich $t \in \mathbb{R}$, lecz dowód tego faktu leży obecnie poza naszym zasięgiem.