Rozmaitości wariacyjne (varifolds) i problem Plateau

Opis wykładu

Rozmaitości wariacyjne (varifolds) stanową uogólnienie rozmaitości różniczkowych w podobny sposób jak funkcje Sobolewa uogólniają funkcje gładkie. Pojawiają się one naturalnie w geometrycznych zagadnieniach wariacyjnych (np. problem Plateau) jako słabe granice gładkich rozmaitości, a zostały zdefiniowane przez Almgrena w latach 60-tych XX wieku jako alternatywa dla prądów (currents); zob. [Alm65]. Rozmaitości wariacyjne to, z grubsza, „prądy bez orientacji”. Współcześnie znalazły też zastosowanie do analizy dyskretnych przybliżeń obiektów gładkich; zob. np. [Bue15].

Wykład będzie w dużej mierze oparty na klasycznych źródłach: artykule Allarda [All72] oraz podręczniku Federera [Fed69]. Zamierzam zdefiniować rozmaitości wariacyjne i omówić ich podstawowe własności skupiając się na teorii regularności.

Poniższa lista zawiera spis zagadnień, które będą poruszane na wykładzie, lecz dokładny dobór materiału zależał będzie od preferencji oraz przygotowania uczestników.

1. Pojęcie rozmaitości wariacyjnej. Porównanie z prądami i zbiorami o skończonym obwodzie (finite perimeter sets). Geneza: problem Plateau.

2. Zbiory prostowalne i całkowicie nieprostowalne. Prostowalne (rectifiable) i całkowite (integral) rozmaitości wariacyjne. Istnienie i (nie)jednoznaczność stożków stycznych (por. [All72, §3.4], [Kol15]).

3. Pierwsza wariacja (first variation) i całkowita wariacja (total variation). Rozmaitości wariacyjne, których całkowita wariacja jest miarą Radona. Uogólniona średnia krzywizna. Związek ze zbiorami o skończonym obwodzie. Wzmianki o drugiej wariacji.

4. Krojenie (slicing) rozmaitości wariacyjnych funkcjami gładkimi (por. [All72, §4.10], [Alm65, §7], [Alm76, §I. 3]).

5. Monotoniczność ilorazów gęstości i konsekwencje. Nierówność izoperymetryczna, nierówność Sobolewa-Poincaré, prostowalność (por. [All72, §5, §7], [Men09]).

6. Twierdzenia o zwartości dla prostowalnych i całkowitych rozmaitości wariacyjnych.

7. Słabe miary regularności: nadmiar miary (measure excess), wysokości (height excess) i pochylenia (tilt excess). Związki między nimi oraz z prostowalnością wyższego rzędu (por. [Sch09, §3], [Men13]).

8. Funkcje Q-wartościowe (por. [Alm00, §1], [DLS11]). Aproksymacja rozmaitości wariacyjnych przez funkcje wielowartościowe (por. [Men10]).

9. Twierdzenie Allarda o regularności (por. [All72, §8]). Wzmianki o wyższej regularności dla stacjonarnych i *stabilnych* rozmaitości wariacyjnych (por. [SS81], [Wic14]).

Efekty uczenia

Po odbyciu kursu „rozmaitości wariacyjne” student:

1. Rozumie złożoność problemu Plateau i ograniczenia poszczególnych klasycznych metod jego rozwiązania (przez parametryzacje lub za pomocą prądów).
2. Zna i rozumie pojęcie rozmaitości wariacyjnej oraz pierwszej i drugiej wariacji.
3. Zna i rozumie pojęcia: stożka stycznego, aproksymatywnego stożka stycznego, aproksymatywnego Jakobianu itp.
4. Potrafi sprawnie operować m-wektorami i m-formami w $\mathbb{R}^n$. Rozumie geometryczną interpretację operacji: produktu zewnętrznego, zwężenia, gwiazdki Hodge'a. Umie obliczać normę i iloczyn skalarny m-wektorów.
5. Potrafi obliczyć wszystkie pochodne kierunkowe wyznacznika w identyczności.
6. Potrafi obliczyć pierwszą wariację dla konkretnych przykładów, np. rozmaitość gładka z gęstością, wykres funkcji gładkiej, brzeg podzbioru o skończonym obwodzie gładkiej rozmaitości, sfera, katenoida.
7. Orientuje się w dostępnych wynikach dotyczących regularności rozmaitości wariacyjnych przy rozmaitych założeniach o pierwszej i drugiej wariacji oraz o wymiarze i kowymiarze rozmaitości.
8. Zna przykłady n-wymiarowych „powierzchni minimalnych” zawierających zbiór osobliwy o wymiarze $n-7$ w kowymiarze 1, a w wyższych kowymiarach o wymiarze $n-2$.
9. Rozumie daleko idące konsekwencje monotoniczności ilorazów gęstości rozmaitości wariacyjnych.
10. Zna schemat typowego dowodu regularności w omawianej dziedzinie i rozumie rolę oszacowań nadmiaru pochylenia w tych dowodach.

Literatura polecana studentom

Podstawowa

1. Podręcznik H. Federera [Fed69].
2. Artykuł W. Allarda [All72].

Uzupełniająca

1. Wykłady L. Simona [Sim83].
2. Wykłady F. Almgrena [Alm65].
3. Wprowadzenie w teorię warifoldów F. Almgrena [Alm01].
4. Książka L. Ambrosio, N. Fusco i D. Pallara [AFP00].
5. Książka L. Evansa i R. Gariepy [EG92] lub [EG15].
6. Książka F. Morgana [Mor16].

Literatura

[AFP00] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, and Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.

[All72] William K. Allard. On the first variation of a varifold. *Ann. of Math. (2)*, 95:417–491, 1972.

[Alm65] F. J. Almgren, Jr. *The theory of varifolds*. Mimeographed Notes. Princton University Press, 1965.

[Alm76] F. J. Almgren, Jr. Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 4(165):viii+199, 1976.

[Alm00] Frederick J. Almgren, Jr. *Almgren's big regularity paper*, volume 1 of *World Scientific Monograph Series in Mathematics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000. Q-valued functions minimizing Dirichlet's integral and the regularity of area-minimizing rectifiable currents up to codimension 2, With a preface by Jean E. Taylor and Vladimir Scheffer.

[Alm01] Frederick J. Almgren, Jr. *Plateau's problem*, volume 13 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. An invitation to varifold geometry, Corrected reprint of the 1966 original, With forewords by Jean E. Taylor and Robert Gunning, and Hugo Rossi. URL: `http://dx.doi.org/10.1090/stml/013`,

[Bue15] Blanche Buet. Quantitative conditions of rectifiability for varifolds. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 65(6):2449–2506, 2015. URL: `http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2015__65_6_2449_0`.

[DLS11] Camillo De Lellis and Emanuele Nunzio Spadaro. Q-valued functions revisited. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 211(991):vi+79, 2011. URL: `http://dx.doi.org/10.1090/S0065-9266-10-00607-1`,

[EG92] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[EG15] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, revised edition, 2015.

[Fed69] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[Kol15] Jan Kolář. Non-unique conical and non-conical tangents to rectifiable stationary varifolds in $\mathbb{R}^4$. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54(2):1875–1909, 2015. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/s00526-015-0847-9`, [Men09] Ulrich Menne. Some applications of the isoperimetric inequality for integral varifolds. *Adv. Calc. Var.*, 2(3):247–269, 2009. URL: `http://dx.doi.org/10.1515/ACV.2009.010`,

[Men10] Ulrich Menne. A Sobolev Poincaré type inequality for integral varifolds. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 38(3-4):369–408, 2010. URL: `http://dx.doi.org/10.1007/s00526-009-0291-9`,

[Men13] Ulrich Menne. Second order rectifiability of integral varifolds of locally bounded first variation. *J. Geom. Anal.*, 23:709–763, 2013.

[Mor16] Frank Morgan. *Geometric measure theory*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, fifth edition, 2016. A beginner's guide, Illustrated by James F. Bredt.

[Sch09] Reiner Schätzle. Lower semicontinuity of the Willmore functional for currents. *J. Differential Geom.*, 81(2):437–456, 2009. URL: `http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.jdg/1231856266`.

[Sim83] Leon Simon. *Lectures on geometric measure theory*, volume 3 of *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*. Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.

[SS81] Richard Schoen and Leon Simon. Regularity of stable minimal hypersurfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 34(6):741–797, 1981. URL: `http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160340603`,

[Wic14] Neshan Wickramasekera. A general regularity theory for stable codimension 1 integral varifolds. *Ann. of Math. (2)*, 179(3):843–1007, 2014. URL: `http://dx.doi.org/10.4007/annals.2014.179.3.2`,

20 marca 2017