1. **[1 pkt]** Wyznaczyć granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sum_{k=1}^{\lfloor 1/|x| \rfloor} k\,.$$

2. **[1 pkt]** Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyznaczyć granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0+} x \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k}{x} \right\rfloor .$$

3. **[1 pkt]** Wyznaczyć granicę funkcji

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(1 + x\ln x)^{1/x}}{x} .$$

4. **[1 pkt]** Niech $\alpha \in (0,\infty)$ Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} .$$

   Wskazówka. Podstawić $y := (1+x)^{\alpha} - 1$ i skorzystać z $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

5. **[1 pkt]** Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} x \sin x + \cos x - 1}{x^4} .$$

6. **[3 pkt]** Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x + \sin x - 2x}{x^5} .$$

   Wskazówka. Odpowiednie podstawienie oraz rozwinięcie w szereg sinusa.

7. **[3 pkt]** Niech $s \in (1,\infty)$ oraz $\mathcal{P}$ oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych.
   (a) Niech $p : \mathbb{N} \to \mathcal{P}$ będzie monotoniczną bijekcją. Pokazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\ln(1 - p(n)^{-s})$$

   jest bezwzględnie zbieżny. Wywnioskować, że liczba $\lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p(n)^{-s}}$ nie zależy od wyboru bijekcji p. Wartość tę będziemy oznaczać

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

(b) Udowodnić tożsamość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

Uwaga. Można korzystać z twierdzenia mówiącego o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze.

Wskazówka. Suma szeregu geometrycznego.