1. **[1 pkt]** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+1/n)}{n}.$$

2. **[1 pkt]** Niech $a_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$. Udowodnić, że

$$\liminf_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n) \geqslant 1. \tag{1}$$

3. **[1 pkt]** Niech $a_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$ oraz $e = \exp(1)$. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(ne)}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{24}{n}\right)^{n+25}.$$

Wskazówka. Można skorzystać z (1).

4. **[1 pkt]** Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor n/2018 \rfloor} \exp(n)}{\exp(n\sqrt[n]{n}) \ln^2 n}.$$

Wskazówka. Można skorzystać z (1).

5. **[1 pkt]** Niech $x \in \mathbb{R}$. Udowodnić tożsamość

$$2\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

6. **[2 pkt]** Niech

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Zbadać zbieżność iloczynu Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

7. **[2 pkt]** Niech

$$a_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{oraz} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Zbadać zbieżność iloczynu Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.