1. **[1 pkt]** Niech $a : \mathbb{N} \cup \{0\} \to (0, \infty)$ będzie nierosnący, a $b : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ będzie rosnący. Dla $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ funkcje $f, S_N : [0, 1) \to \mathbb{R}$ dane są wzorami
$$S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} (-1)^n a_n x^{b_n} \quad \text{oraz} \quad f(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)\,.$$
Pokazać, że funkcja f jest dobrze określona (tzn. powyższy szereg jest zbieżny dla każdego $x \in [0, 1)$) oraz, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $x \in [0, 1)$ prawdziwe są nierówności
$$S_{2k+1} \leqslant f(x) \leqslant S_{2k}\,.$$
Wskazówka. Zbadać ogony szeregu: $S_{2k}(x) - f(x)$ oraz $f(x) - S_{2k+1}(x)$.
Można ponadto skorzystać z lematu z ćwiczeń:

jeśli $\mathbb{R} \ni b_n \to 0$, to $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(b_{2n} + b_{2n+1})$.

2. **[1 pkt]** Udowodnić oszacowania
$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant \exp(-x) \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2} \quad \text{dla } x \in [0, 1)\,,$$
$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \leqslant \exp(x) \leqslant 1 + \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}{1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}} \quad \text{dla } x \in [0, 1)\,,$$
$$\exp\Big(x - \frac{x^2}{2}\Big) \leqslant 1 + x \leqslant \exp\Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\Big) \quad \text{dla } x \in [0, 1)\,,$$
$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{dla } x \in [0, 1)\,.$$
Wskazówka. $\exp(x - x^2/2) = \exp(x)\exp(-x^2/2)$.
Wskazówka. Nie bać się długich rachunków ale robić rachunki z głową.

3. **[1 pkt]** Zbadaj zbieżność szeregu
$$\sum_{n=100}^{\infty} \ln\Big(\frac{n^2 + 3n - 2}{n^2 - 2n + 7}\Big) - \frac{5n^3}{(n^2 - 2n + 7)^2}\,.$$

4. **[1 pkt]** Niech
$$b_n = \ln\Big(\frac{n!\exp(n)}{n^n\sqrt{n}}\Big)\,, \quad c_n = b_{n+1} - b_n\,.$$
Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Wywnioskuj, że granica
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$$
istnieje i jest skończona.

5. **[1 pkt]** Zbadaj dla jakich wartości parametru $\alpha \in (0, \infty)$ zbieżny jest szereg

$$\sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{n^2 \left(\sqrt[n]{\ln n} - 1 \right)^{\alpha} \ln(n)} \, .$$