1. **[1 pkt]** Oblicz granice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\,.$$

Korzystając z powyższych granic wyznacz

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}-1\right)\,.$$

2. **[1 pkt]** Wykazaliśmy już, że dla $a, b \in (0,\infty)$ oraz $p, q \in (1,\infty)$ *dwójkowo wymiernych* i spełniających $pq = p + q$ zachodzi *nierówność Younga*, tj.

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,.$$

Udowodnić, że powyższa nierówność zachodzi dla *wszystkich* $p, q \in (1,\infty)$ spełniających $pq = p + q$. Wywnioskować, że funkcja exp jest *wypukła*, tzn.

$$\exp(tx + (1-t)y) \leqslant t\exp(x) + (1-t)\exp(y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R} \text{ oraz } t \in [0,1]\,.$$

3. **[1 pkt]** Udowodnij

$$\lim_{n\to\infty}\Big(n!e - \lfloor n!e\rfloor\Big) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = \ln 2\,.$$

4. **[1 pkt]** Niech $a, b \in \mathbb{R}$ oraz

$$a_1 = a\,, \quad a_2 = b\,, \quad a_{n+1} = \frac{n-1}{n}a_n + \frac{1}{n}a_{n-1} \quad \text{dla } n \geqslant 2\,.$$

Oblicz $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Wskazówka. Można spojrzeć najpierw na ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n$.

5. **[1 pkt]** Udowodnij

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \exp(1/2)\,.$$