1. **[1 pkt]** Niech
$$a_1 = 2\,, \quad a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n} \quad \text{dla } n > 1\,.$$
Udowodnić, że istnieje skończona granica $\lim_{n\to\infty} a_n$. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. **[1 pkt]** Dane są dwie liczby dodatnie $a, b \in (0, \infty)$. Definiujemy ciągi
$$a_0 = a\,, \quad b_0 = b\,, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}\,,$$
Udowodnić, że istnieją skończone granice $\lim_{n\to\infty} a_n$ oraz $\lim_{n\to\infty} b_n$ i są sobie równe.

3. **[1,5 pkt]**
   (a) Niech $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Pokazać, że $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$.
   (b) Dla $k \in \mathbb{N}$ definiujemy
   $$(2k)!! = \prod_{m=1}^{k} 2m \quad \text{oraz} \quad (2k-1)!! = \prod_{m=1}^{k} (2m-1)\,.$$
   Kładziemy
   $$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,.$$
   Pokazać, że $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

   *Wskazówka.* Warto popatrzeć na ciąg $b_n = \ln a_n$ i skorzystać z (a).

4. **[1 pkt]** Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \left( \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + \frac{7n}{n^2 + 2017} \right)^{n+\sqrt{n}}\,.$$

5. **[0,5 pkt]** Niech
$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\,.$$
Udowodnić, że granica $\lim_{n\to\infty} a_n$ istnieje i jest skończona.

*Wskazówka.* Warto popatrzeć na ciąg $b_n = \ln a_n$.