1. **[1 pkt]** Znajdź kresy zbioru
$$X = \left\{ \frac{m^2+n^2+mn+3m}{mn} : m,n \in \mathbb{N} \right\}.$$
2. **[1 pkt]** Znajdź kresy zbioru
$$Y = \left\{ \frac{m^4(m^2+1)n^4p^2}{\left(m^2+n\sqrt{m^2+1}+3np\right)^6} : m,n,p \in \mathbb{N} \right\}.$$
Wskazówka. Można skorzystać z następującego faktu: $\sup A = M$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \leqslant M$ oraz istnieje ciąg $\{a_n \in A : n \in \mathbb{N}\}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = M$.
3. **[1 pkt]** Niech
$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{ x + y\sqrt{2} : x, y \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$
Wykazać, że $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jest ciałem uporządkowanym[1] ale nie spełnia aksjomatu ciągłości.
Wskazówka. Warto skorzystać z faktu, że $\mathbb{R}$ jest ciałem uporządkowanym.
4. **[1 pkt]** Mówimy, że liczba $x \in \mathbb{R}$ jest *dwójkowo wymierna* jeśli istnieją $M, N \in \mathbb{N}$ oraz ciąg $\epsilon_{-M}, \epsilon_{-M+1}, \ldots, \epsilon_N \in \{0,1\}$ takie, że
$$x = \sum_{k=-M}^{N} \frac{\epsilon_k}{2^k}.$$
   (a) Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n} \in \mathbb{R}$. Pokazać, że
$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} a_k^{2^n}.$$
   (b) Niech $p, q \in (1, \infty)$ będą takie, że $1/p + 1/q = 1$ oraz $1/p$ jest dwójkowo wymierna. Pokazać, że dla $a, b \in (0, \infty)$ zachodzi
$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Wskazówka. Podpunkt (a) jest podpowiedzią do podpunktu (b).
5. **[1 pkt]** Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi
$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right)^2 \right)^{1/2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 + b_k^2 \right)^{1/2}.$$

[1] *Ciekawostka.* Zbiór $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ jest także przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{Q}$ wymiaru 2. Niech $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ będzie najmniejszym pod-ciałem $\mathbb{R}$ zawierającym $\sqrt[3]{2}$. Jaki jest wymiar $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ jako przestrzeni liniowej nad $\mathbb{Q}$?