Kryterium Dirichleta. Jeśli ciąg liczb rzeczywistych b_n maleje do zera, a sumy częściowe A_n szeregu $\sum a_n$ tworzą ciąg ograniczony, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

Kryterium Abela. Jeśli b_n jest malejącym ciągiem liczb dodatnich, a szereg $\sum a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny.

1. Zbadać zbieżność szeregów

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n};$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-1/n}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+(-1)^{n+1}};$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+10}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(n-1)^n\ln n};$$

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor n/7\rfloor}\frac{1}{\sqrt{n}}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^\alpha}, \quad \text{gdzie } \alpha>0;$$

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\sqrt[n]{1/n}\right)^\alpha, \quad \text{gdzie } \alpha>0; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{1-\frac{1}{2}(n \bmod 2)}};$$

(6) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\exp(n)}{\exp(n\sqrt[n]{n})(\ln n)^2}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor n/13\rfloor}\frac{\ln n}{n\ln(\ln n)};$$

(7) $$(*)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\left\lfloor\frac{n^3+n+1}{3n^2-1}\right\rfloor}\frac{\ln n}{n}; \qquad (*)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor\ln n\rfloor}\frac{1}{n};$$

(8) $$(*)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{gdzie } \alpha>0; \qquad (*)\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{\ln n}.$$

2. Załóżmy, że $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ jest zbieżny oraz $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ jest bijekcją taką, że istnieje $M\in\mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$ zachodzi $|\sigma(n)-n|\leqslant M$. Czy wówczas $\sum_{n=0}^{\infty}a_{\sigma(n)}$ jest zbieżny?
3. Podać przykład ciągu a_n takiego, że szereg $\sum a_n$ jest zbieżny ale $\sum a_n^2$ jest rozbieżny.
4. Niech $\sigma:\mathbb{N}_+\to\mathbb{N}_+$ będzie dana przez $\sigma(n)=n+(-1)^{n+1}$. Udowodnić, że σ jest bijekcją oraz spełnia $|\sigma(n)-n|\leqslant 1$. Wywnioskować, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$$

jest zbieżny.

5. Z wykładu wiadomo, że dla $x \in \mathbb{R}$ (a nawet dla $x \in \mathbb{C}$) mamy

$$\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{1/n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,.$$

Niech $l \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że jeśli $x \in \mathbb{R}$ spełnia $|x| < 1$, to

$$\left|\exp(x) - \sum_{n=0}^{l} \frac{x^n}{n!}\right| \leqslant \frac{|x|^{l+1}}{1-|x|}\,.$$

Wywnioskować, że dla każdego ciągu x_n takiego, że $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ mamy

$$\limsup_{n\to\infty} |x_n|^{-l-1} \left|\exp(x_n) - \sum_{k=0}^{l} \frac{x_n^k}{k!}\right| < \infty\,.$$

6. Niech

$$a_n = n(\sqrt[n]{n} - 1) = n\left(\exp\left(\tfrac{\ln(n)}{n}\right) - 1\right)\,.$$

   (a) Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} n\big(a_{n+1} - a_n\big)\,.$$

   (b) Wywnioskować, że a_n jest rosnący od pewnego miejsca.

   (c) Zbadać zbieżność szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n} \left(1 + \frac{70}{n}\right)^n \left(\frac{n-2}{n+3}\right) \left(1 + \frac{2016}{n}\right)^{n+2017}\,.$$

7. Znaleźć iloczyn Cauchy'ego szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{gdzie } x \in \mathbb{R},\ |x| < 1\,.$$