1 Definicja. Mówimy, że $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest *wypukła* jeśli

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)\quad \text{dla } x,y\in(a,b) \text{ oraz } t\in[0,1]\,.$$

Mówimy, że f jest *wklęsła* jeśli $g=-f$ jest wypukła.

Na ćwiczeniach poznaliśmy już następujące fakty:

- Jeśli $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest *ciągła* oraz
$$f\big(\tfrac{1}{2}(x+y)\big)\leqslant\tfrac{1}{2}\big(f(x)+f(y)\big)\quad \text{dla wszystkich } x,y\in(a,b)\,,$$
to f jest wypukła.
- Zachodzi *nierówność Younga*, tj.
$$xy\leqslant\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\quad \text{dla } x,y\in(0,\infty) \text{ oraz } p,q\in(1,\infty) \text{ spełniających } \tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}=1\,.$$
- Funkcja $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest wypukła.

---

1. Udowodnić *nierówność Höldera*, tj.
$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$$
dla $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in(0,\infty)$ oraz $p,q\in(1,\infty)$ spełniających $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
2. Udowodnić nierówność Höldera dla szeregów, tj.
$$\sum_{n=1}^\infty a_nb_n\leqslant\left(\sum_{i=1}^\infty |a_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^q\right)^{1/q}$$
zakładając, że $p,q\in(1,\infty)$ spełniają $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ oraz $\sum_{n=1}^\infty|a_n|^p$ i $\sum_{n=1}^\infty|b_n|^q$ są zbieżne.
3. Udowodnić ogólną nierówność między ważonymi średnimi:
Niech $x_1,\dots,x_n\in(0,\infty)$ oraz $w_1,\dots,w_n\in[0,1]$ będą takie, że $\sum_{i=1}^n w_i=1$. Kładziemy
$$M_p(x_1,\dots,x_n)=\left(\sum_{k=1}^n x_k^pw_i\right)^{1/p}\qquad \text{dla } p\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$
$$\text{oraz}\quad M_0(x_1,\dots,x_n)=\inf\{M_p(x_1,\dots,x_n):p>0\}\,.$$
   - Pokazać, że dla $0<p\leqslant q<\infty$ zachodzi
   $$M_p(x_1,\dots,x_n)\leqslant M_q(x_1,\dots,x_n)\,. \tag{1}$$
   - Dla $p\in(0,\infty)$ mamy
   $$M_{-p}(x_1,\dots,x_n)=M_p(x_1^{-1},\dots,x_n^{-1})^{-1}\,.$$
   Udowodnić, że (1) zachodzi również dla $-\infty<p\leqslant q<0$.

- Obliczyć granice

$$\lim_{p\to 0} M_p(x_1,\dots,x_n)\,, \quad \lim_{p\to \infty} M_p(x_1,\dots,x_n)\,, \quad \lim_{p\to -\infty} M_p(x_1,\dots,x_n)\,.$$

  Wskazówka. Można skorzystać z faktu, że jeśli $a_n b_n \to g \in [-\infty,\infty]$ oraz $a_n \to 0$, to $(1+a_n)^{b_n} \to \exp(g)$.

- Wywnioskować, że (1) zachodzi dla dowolnych $p, q \in [-\infty,\infty]$, $p \leqslant q$.
  Kiedy w (1) jest równość?

4. Niech $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^p$ dla pewnego $p \in \mathbb{R}$. Udowodnić, że f jest wypukła jeśli $p \in [1,\infty)$ oraz wklęsła jeśli $p \in (0,1]$.