1. Ciąg $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ spełnia $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = g \in (0, \infty)$. Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = g$.

   Wskazówka. Twierdzenie Stolza.

2. Ciąg $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest nierosnący i spełnia
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n^2} = g \in (0, \infty) .$$
   Pokaż, że
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} n a_n = g^{-1} .$$
   Wskazówka. Rozpatrz ciąg $b_n = a_n^{-1}$.
   Czy założenie o monotoniczności a_n można pominąć?

3. Ciąg $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ zdefiniowany jest rekurencyjnie
$$a_1 > 0 , \qquad a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} .$$
   Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} n a_n = 2$. Następnie zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

   Wskazówka. Mamy $x - x^2/2 < \ln(1 + x) < x - x^2/2 + x^3/3$ dla $x \in (0, 1)$.

---

4. Pokaż, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy z każdego pokrycia A zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone, tzn. jeśli I jest zbiorem indeksów (dowolnej mocy) oraz $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ jest rodziną *otwartych* podzbiorów $\mathbb{R}$ spełniającą $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$, to można wybrać *skończony* podzbiór $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ taki, że $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$.

5. Niech $C \in (0, \infty)$. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia
$$\limsup_{h\to 0} \frac{|f(x + h) - f(x)|}{|h|} \leqslant C \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} .$$
   Pokaż, że dla wszystkich $x, h \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$|f(x + h) - f(x)| \leqslant C|h| .$$

6. Niech $\alpha \in (0, 1)$. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia
$$\limsup_{h\to 0} \frac{|f(x + h) - f(x)|}{|h|^\alpha} \leqslant C \in (0, \infty) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} .$$
   Pokaż, że dla każdego $M > 0$ istnieje $A > 0$ takie, że dla wszystkich $x, h \in \mathbb{R}$ takich, że $x, x + h \in [-M, M]$ zachodzi
$$|f(x + h) - f(x)| \leqslant A|h|^\alpha .$$
   Wskazówka. Nierówność Höldera.

7. Niech $\alpha \in (1, \infty)$. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia
$$\limsup_{h\to 0} \frac{|f(x + h) - f(x)|}{|h|^\alpha} \leqslant C \in (0, \infty) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} .$$
   Pokaż, że f jest funkcją stałą.

   Uwaga. Najłatwiej skorzystać z rachunku różniczkowego.

Definicja. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dla $h > 0$ definiujemy funkcję $\Delta_h f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}\,.$$

Dalej, iterując operator Δ_h, otrzymujemy funkcję $\Delta_h^2 f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h(\Delta_h f)(x) = f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}\,.$$

8. Znajdź przykład *nieciągłej* funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniającej

$$\sup\{\Delta_h^2 f(x) : x, h \in \mathbb{R}\} \leqslant C \in (0, \infty)\,.$$

Wskazówka. Rozpatrz $\mathbb{R}$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$.

9. Niech $\alpha \in (0,1)$. Załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i spełnia

$$\sup\{h^{-\alpha}\Delta_h^2 f(x) : x, h \in \mathbb{R}\} \leqslant C \in (0, \infty)\,.$$

Pokaż, że wówczas f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α na każdym zwartym podzbiorze $\mathbb{R}$, tzn.

$$\sup\{|x-y|^{-\alpha}|f(x) - f(y)| : x, y \in A\} < \infty \quad \text{dla każdego zwartego zbioru } A \subseteq \mathbb{R}\,.$$

Czy założenie o zwartości A można pominąć?

10. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2^k x)}{2^k}\,.$$

Pokaż, że f jest dobrze określona, ciągła, okresowa i spełnia

$$\sup\{h^{-1}\Delta_h^2 f(x) : x, h \in \mathbb{R}\} \leqslant C \in (0, \infty)\,.$$

ale *nie spełnia warunku Lipschitza na żadnym przedziale*, tzn. dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ spełniających $a < b$ zachodzi

$$\sup\{|x-y|^{-1}|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b]\} = \infty\,.$$
