1. Hierarchia wzrostu. Na potrzeby tej notki wprowadzamy następujące oznaczenie: jeśli $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ są ciągami, to piszemy

$$a \preccurlyeq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\,.$$

Mamy

$$\cdots \preccurlyeq \ln\ln n \preccurlyeq \ln n \preccurlyeq n \preccurlyeq n^k \preccurlyeq 2^n \preccurlyeq 3^n \preccurlyeq (n/e)^n \preccurlyeq n! \preccurlyeq (n/2)^n \preccurlyeq n^n \preccurlyeq \cdots\,.$$

2. Ważne granice.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)\,, \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right) = \ln(x) \quad \text{dla } x>0\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1 \quad \text{dla } k\in\mathbb{N}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n = \gamma \in (0,1)\,.$$

3 Lemat. *Jeśli $a : \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich, to*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = g \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = g\,.$$

4 Przykład. *Dla $n\in\mathbb{N}$ połóżmy*

$$a_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n\,.$$

Wówczas

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k} = e\,, \quad \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)^{2k+1} = \frac{1}{e}\,,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = e^2\,, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = e^{-2}\,, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ \emph{nie istnieje!}}\,, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1\,.$$

5. Zadania.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n\exp(-n)}\right)^{1/n}\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{3n}}{(n!)^3}\right)^{1/n}\,.$$

6 Lemat. *Jeśli $a : \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ jest ciągiem takim, że*

$$\lim_{n\to\infty} n a_n = g \in \mathbb{R}\,,$$

to

$$\lim_{n\to\infty}(1+a_n)^n = \exp(g)\,.$$

7. Zadania.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n+4}\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)^{2n^2+5}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n(n-1)/2}\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(7\sqrt[n]{2}-6\right)^n\,,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{\frac{2}{3}}+\sqrt[n]{\frac{3}{2}}}{2}\right)^n\,, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+3n^2-12n+5}{n^3+5n^2-7n+1}\right)^n\,.$$

8 Twierdzenie (Stolz)**.** *Niech $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ będą ciągami takimi, że*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ b_n < b_{n+1}\,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \infty\,, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = g\,.$$

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g\,.$$

9. Zadania.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \text{gdzie } \alpha \in (0,\infty)\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n+k}}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \sum_{j=1}^n \frac{(k+j)!}{j!}\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} \sum_{j=1}^n j^k - \frac{n}{k+1}\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{n+1}} \sum_{j=1}^n \frac{a^j}{j} \quad \text{gdzie } a \in (1,\infty)\,.$$

10. Ważne oszacowania.

$$\exp(x) \geqslant 1 + x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}\,, \qquad \exp(x) \leqslant 1 + \frac{x}{1-x} \quad \text{dla } x \in (-\infty, 1)\,,$$

$$\ln(1+x) \leqslant x \quad \text{dla } x \in (-1,\infty)\,, \qquad \ln(1+x) \geqslant \frac{x}{1+x} \quad \text{dla } x \in (-1,\infty)\,,$$

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \quad \text{dla } x \in (-1,\infty)\,, \qquad (1+x)^{1/n} \leqslant 1 + \frac{x}{n} \quad \text{dla } x \in (-n,\infty)\,.$$

11. Sumowanie „przez części”.
Jeśli $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest ciągiem, definiujemy nowy ciąg $\Delta a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\Delta a_n := (\Delta a)_n = a_{n+1} - a_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}\,.$$

Wówczas

$$\sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k = a_n - a_1 =: a\Big|_1^n\,.$$

Ponadto, jeśli $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, to

$$\Delta(ab)_n = a_{n+1}b_{n+1} - a_n b_n = a_{n+1}\Delta b_n + b_n \Delta a_n\,,$$

zatem

$$\sum_{k=1}^{n-1} b_n \Delta a_n = (ab)\Big|_1^n - \sum_{k=1}^{n-1} a_{n+1}\Delta b_n\,.$$

12. Zadania.
Wyraź za pomocą zwartego wzoru

$$\sum_{k=1}^{n-1} k2^k\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)}\,, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(k-2)(k-3)\,, \qquad \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{k} \frac{1}{m} = \sum_{k=1}^{n-1} H_k\,.$$

13. Zadanie.

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}-1\right), \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-1\right),$$

Wskazówka. Pokazać, że

$$\begin{aligned}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n(n-1)}\\ &= \left(1-\frac{n(n-1)(n+4)}{2(n^2+1)}+R(n)\right)^n\end{aligned}$$

gdzie

$$\lim_{n\to\infty} n^2R(n)=0\,.$$

Dalej skorzystać z nierówności Bernouliego i/lub „ważnych oszacowań”.

14. Zadanie. Niech $g\in\mathbb{R}$. Udowodnić, że granica

$$\lim_{n\to\infty} n^{-g}\binom{n+g}{n}$$

istnieje i jest skończona

Wskazówka. Rozpatrzyć ciąg $\ln\binom{n+g}{n}$.

15. Zadanie. Niech $g\in\mathbb{R}$ oraz $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ będzie ciągiem takim, że

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=g\,.$$

Udowodnić, że dla każdego $h\in\mathbb{R}$ mamy

$$\limsup_{n\to\infty} n^h a_n=\begin{cases}0 & \text{jeśli } h<g\\ \infty & \text{jeśli } h>g\end{cases}.$$

Wskazówka. Można skorzystać z zadania 14.

16. Zadanie. Pokazać, że dla $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!e^n}{n^n n^\alpha}=\begin{cases}0 & \text{jeśli } \alpha>1/2\\ \infty & \text{jeśli } \alpha<1/2\end{cases}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!n^\alpha}=\begin{cases}0 & \text{jeśli } \alpha>1/2\\ \infty & \text{jeśli } \alpha<1/2\end{cases}.$$

Wskazówka. Można skorzystać z wyników zadania 13.