1. Obliczyć granice

1. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+3x^2-4}{x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-3x^2-10x+24}$
3. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}-8}{\sqrt[4]{x}-2}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+25}-5}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{x(\sqrt{x^2+1}-x)}$
9. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[3]{x(x+1)^2}-\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^3-3x^2+4}-x+2}{x^4-4}$
11. $\lim\limits_{x\to \infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$
12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt{4x-3}-1}$
13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$
14. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$
15. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$
16. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos x}}{\sin x-\cos x}$
17. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$
18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$
19. $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$
20. $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{1}{x}$
21. $\lim\limits_{x\to \infty} \sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$
22. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$
23. $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x+3}\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$
24. $\lim\limits_{x\to \infty} \sin\sqrt{x+2}\sin(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$
25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{x^2}$
26. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\operatorname{arc}\sin(x+2)}{x^2+2x}$
27. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$
28. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$
29. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x-5}$
30. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

2. Zbadać istnienie granic i obliczyć jeśli istnieją

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\sqrt{\cos x}}}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(e^x+1)}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\log_{10} x-1}{x-10}$

9. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos x)}{\sin(\sin x)}$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$ dla $a\in(0,\infty)$

3. Obliczyć granicę
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} \quad \text{dla } \alpha\in\mathbb{R}$$
Wskazówka: podstawić $y:=(1+x)^\alpha-1$ i skorzystać z $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.
4. Zbadać istnienie granic i obliczyć jeśli istnieją

1. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x+2\operatorname{arctg}3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 x)+xe^x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\operatorname{tg} x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg} x}$

5. Zbadać ciągłość funkcji
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}, \quad x\in\mathbb{R}, \qquad g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1}, \quad x\in\mathbb{R},$$
$$h(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(e^n+x^n)}{n}, \quad x\geqslant 0, \qquad k(x)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\cos^{2n}x+\sin^{2n}x}, \quad x\in\mathbb{R}.$$
6. Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełnia warunek
$$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall q\in\mathbb{Q} \quad f(x+q)=f(x).$$
Czy wynika stąd, że f jest stała? A co jeśli założymy, że f jest ciągła?

Granice, które każdy powinien znać:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\exp x-1}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e \qquad \lim_{x\to 0}\sin\tfrac{1}{x} \text{ nie istnieje!}$$

Warto też pamiętać, że

$$1-\cos x=2\sin^2\tfrac{x}{2} \qquad \sin^2 y=\tfrac{1}{2}(1-\cos 2y)$$
$$\cos z-\cos w=-2\sin\tfrac{z-w}{2}\sin\tfrac{z+w}{2} \qquad \sin z-\sin w=2\sin\tfrac{z-w}{2}\cos\tfrac{z+w}{2}$$
$$x+1\leqslant\exp x\leqslant\frac{1}{1-x} \qquad \frac{x}{1+x}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x$$