1. Podać przykład bijekcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $f(0) = 0$, f jest ciągła w 0 ale f^{-1} jest nieciągła w 0.
2. Które z następujących funkcji są ciągłe, a które jednostajnie ciągłe?

(1)	$f : [0,1] \to \mathbb{R}$	$f(x) = \sqrt{x}\,,$
(2)	$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$	$f(x) = \sqrt{x}\,,$
(3)	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = x^2\,,$
(4)	$f : [-7,5] \to \mathbb{R}$	$f(x) = x^2\,,$
(5)	$f : [1/n,1] \to R$	$f(x) = \sin(1/x)\,,$
(6)	$f : [0,1] \to \mathbb{R}$	$f(x) = \sin(1/x)$ dla $x > 0$ oraz $f(0) = 0\,,$
(7)	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = \sin^2(x)\,,$
(8)	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x^2)\,,$
(9)	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$f(x) = \lvert x\rvert\,,$
(10)	$f : [-M,M] \to \mathbb{R}$	$f(x) = \exp(x)\,.$

3. Niech $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ oraz $f : B \to \mathbb{R}$ będzie jednostajnie ciągła. Czy funkcja $g : A \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(x) = f(x)$ dla $x \in A$ jest jednostajnie ciągła?
4. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia
$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} f(a/n) = 0\,.$$
Czy wynika stąd, że $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$?
5. Znaleźć zbiór punktów ciągłości funkcji
$$f(x) = \begin{cases} \sin|x| & \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$
6. Niech $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l > 1$, $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ spełniają warunek
$$\forall x \in (0,\infty) \quad kf(x) \leqslant f(lx)\,.$$
   - Czy f ma granicę w 0?
   - Czy f jest ciągła w 0?
   - Co się zmieni jeśli f ograniczona?
   - Co się zmieni jeśli f ciągła?
7. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. Wykazać, że funkcje
$$m(x) = \inf\{f(y) : y \in [a,x]\} \quad \text{oraz} \quad M(x) = \sup\{f(y) : y \in [a,x]\}$$
są ciągłe.
8. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ograniczona. Wykazać, że funkcje
$$m(x) = \inf\{f(y) : y \in [a,x)\} \quad \text{oraz} \quad M(x) = \sup\{f(y) : y \in [a,x)\}$$
są lewostronnie ciągłe na (a,b).

9. Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie ciągła. Wykazać, że istnieje punkt $x_0 \in [0,1]$ taki, że $f(x_0) = x_0$.
Wskazówka: Własność Darboux.
10. Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą ciągłe i takie, że $f(a) < g(a)$ oraz $f(b) > g(b)$. Wykazać, że istnieje punkt $x_0 \in [a,b]$ taki, że $f(x_0) = g(x_0)$.
11. Pokazać, że:

$$(1-x)\cos(x) = \sin(x) \quad \text{ma rozwiązanie w } (0,1)\,,$$
$$e^x = |x| \quad \text{ma rozwiązanie w } \mathbb{R}\,,$$
$$e^x = |P(x)| \quad \text{ma rozwiązanie w } \mathbb{R} \text{ o ile } P \text{ jest wielomianem stopnia co najmniej } 1\,.$$

12. Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mają własność Darboux. Czy funkcja $f+g$ też ma własność Darboux?
Przykład:

$$f(x) = \sin(1/x) \quad \text{dla } x > 0\,, \qquad f(0) = 0\,,$$
$$g(x) = -\sin(1/x) \quad \text{dla } x > 0\,, \qquad g(0) = 1\,.$$

---

13. Niech $a, b \in \mathbb{R}$ spełniają $a < b$ oraz niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła *wtedy i tylko wtedy* gdy istnieją skończone granice $\lim_{x\to a^+} f(x)$ oraz $\lim_{x\to b^-} f(x)$.
14. Niech $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie taka, że istnieje skończona granica $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła.
15. Niech $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie jednostajnie ciągła. Czy wynika stąd istnienie granicy $\lim_{x\to\infty} f(x)$? Czy granica ta musi być skończona?
16. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ spełniają $a < b < c$. O funkcji $f : (a,c) \to \mathbb{R}$ wiadomo, że jest ciągła w b oraz jednostajnie ciągła na przedziałach (a,b) oraz (b,c). Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła.
17. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie okresowa i ciągła. Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła.
18. Niech $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$ oraz niech $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ będą jednostajnie ciągłe. Czy funkcja fg jest jednostajnie ciągła?
19. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ spełniają $a < b$ oraz $c < d$. Niech $f : (a,b) \to (c,d)$ oraz $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ będą jednostajnie ciągłe. Czy funkcja $g \circ f$ jest jednostajnie ciągła?

---

20. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie wypukła. Pokazać, że jeśli istnieje punkt $x_0 \in (a,b)$ taki, że $f(x_0) = \sup\{f(y) : y \in [a,b]\}$, to f jest funkcją stałą.