Wersja poprawiona z dnia 19.06.2017.

1. **[1 p.]** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i taka, że całka $\int_0^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna. Zbadać zbieżność całki
$$\int_{\Gamma(e^9)}^{\infty} f\left(\tfrac{2}{\pi} x \operatorname{arc\,tg} x\right)\,dx\,.$$
Uwaga: Funkcja Γ jest zdefiniowana w skrypcie prof. Strzeleckiego w rozdziale 10.2.
Wskazówka: Funkcja ściśle monotoniczna jest bijekcją, więc ma funkcję odwrotną.
2. **[1 p.]** Niech $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna (patrz Definicja 9.53 w skrypcie prof. Strzeleckiego) na każdym przedziale zwartym $[c, d] \subseteq (a, b)$. Ponadto wiadomo, że całka
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
jest zbieżna. Pokazać, że funkcja $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$$
jest ciągła. Czy F jest jednostajnie ciągła?
3. **[1 p.]** [Transformata Fouriera funkcji $1/x$] Obliczyć (tzn. wyrazić zwartym wzorem, w którym nie występuje całkowanie) funkcję
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\mathbf{i}\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\epsilon,\epsilon)} \frac{e^{\mathbf{i}tx}}{x}\,dx\,, \quad \text{gdzie } \mathbf{i} = \sqrt{-1}\,.$$
Wskazówka: Pomocna może być Uwaga 10.10 ze skryptu prof. Strzeleckiego.
Uwaga: Całkę z funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ o wartościach zespolonych definiujemy jako
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,dx + \mathbf{i} \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,dx\,.$$
4. **[1 p.]** Niech $(x_n)_{n=0}^\infty$ będzie ściśle rosnącym ciągiem liczb takim, że
$$x_0 = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty\,.$$
Niech $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i taka, że $F(0) = 0$. Ponadto załóżmy, że F jest różniczkowalna na każdym przedziale (x_{i-1}, x_i) dla $i = 1, 2, \ldots$. Kładziemy $f(x) = F'(x)$ w punktach, gdzie $F'(x)$ istnieje oraz $f(x) = 0$ jeśli $F'(x)$ nie istnieje. Udowodnić, że
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

5. **[0.5 p.]** Niech $-\infty < a < b < \infty$ oraz $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale zwartym $[c, d] \subseteq (a, b)$. Załóżmy ponadto, że całka
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
jest zbieżna bezwzględnie. Pokazać, że dla każdego $\alpha \in (0, 1)$
$$\int_a^b |f(x)|^\alpha\,dx < \infty\,.$$
Wskazówka: Oszacować $|f(x)|^\alpha$ inną funkcją.

6. **[0.5 p.]** Zbadać zbieżność całki
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)\ln(x)}{x}\,dx\,.$$

7. **[0.5 p.]** Zbadać zbieżność całki
$$\int_0^1 \frac{\ln(\sin(x)\cos(x))}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

8. **[0.5 p.]** Określić dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ poniższa całka jest zbieżna
$$\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x\ln^\alpha(x)}\right)dx\,.$$

9. **[0.5 p.]** Zbadać zbieżność całki
$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \sqrt{1-x^2}}\,.$$

10. **[0.5 p.]** Zbadać zbieżność całki
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\operatorname{arc\,tg}(x)}\ln(x)}{\sqrt[3]{x^6+6x^5+7x^4}}\,dx\,.$$

11. **[0.5 p.]** Niech
$$\gamma = \left\{(1-e^{-t^2}, \tfrac{1}{t}+1+t+t^2) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0,\infty)\right\}\,.$$
Obliczyć pole figury
$$F = \left\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1\,, y \geqslant 0\,, \exists (x',y') \in \gamma \ \ x = x' \text{ i } y \leqslant y'\right\}\,.$$
Wskazówka: Znaleźć funkcję f, taką że $f(1-e^{-t^2}) = \frac{1}{t}+1+t+t^2$. Zastosować podstawienie $z = 1-e^{-t^2}$.

12. **[0.5 p.]** Obliczyć pole figury ograniczonej prostymi $y = 0$, $x = 0$, $x = e$ oraz krzywą daną parametrycznie:

$$\left\{ (t \ln t, t^2) \in \mathbb{R}^2 : t \in [1, e] \right\}.$$

Wskazówka: Udowodnić, że istnieje funkcja f, taka że $f(t \ln t) = t^2$. Zastosować podstawienie $z = t \ln t$.

Uwagi:

- Czytelnść i przejrzystość pracy będzie wpływać na ocenę.
- Przy ocenianiu powyższych zadań, oprócz formalnej poprawności rozumowań, ocenie będzie podlegał również *styl* rozwiązania. Jest to oczywiście pojęcie subiektywne i trudne do zdefiniowania. Krótsze rozwiązanie jest lepsze niż dłuższe. Rozwiązanie zawierające mniej rachunków jest lepsze niż zawierające dużo rachunków. Czym więcej zlokalizowanych i sprawnie wykorzystanych własności badanych obiektów tym lepiej.
- Rozwiązania należy oddać do **środy, 14 czerwca**, do godziny **10:00**. Prace napisane odręcznie można włożyć do koperty i zostawić w mojej przegródce w sekretariacie. Można też przesłać rozwiązania złożone w TEXu i skompilowane do PDFa przez e-mail.

Powodzenia!