1. **[0,6 pkt]** Rozwinąć w szereg Taylora–Maclaurina funkcję
$$f(x) = \Big((2x+3)\left(x^2-6x+14\right)\Big)^{-1}.$$
Uwaga: Można wyrazić współczynniki rozwinięcia przy pomocy liczb zespolonych.

2. **[0,6 pkt]** Rozwinąć w szereg Taylora–Maclaurina funkcję
$$f(x) = \frac{\exp(x^2)}{1-x^2}.$$
Znaleźć promień zbieżności tego szeregu.

3. **[0,6 pkt]** Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności szeregu
$$\sum_{n=100}^{\infty} \binom{1/7}{n} \Big(\exp(x-1)\Big)^n.$$
Fakultatywne [0,6 pkt]: Zbadać zbieżność szeregu liczbowego:
$$\sum_{n=100}^{\infty} (-1)^n \binom{1/7}{n}.$$

4. **[0,6 pkt]** Obliczyć sumę
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$
Wskazówka: Można skorzystać z następujących faktów:
$$f(x) = -\frac{1}{6}\ln\Big(\tfrac{1}{4}((2x-1)^2+3)\Big) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{\frac{2}{3}(2x-1)}{(2x-1)^2+3},$$
$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\Big((2x-1)/\sqrt{3}\Big) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{2}{(2x-1)^2+3},$$
$$h(x) = \frac{1}{3}\ln(x+1) \quad \Rightarrow \quad h'(x) = \frac{1}{3(x+1)}.$$

5. **[0,6 pkt]** Niech $\alpha \in (0,1)$ oraz $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą dane wzorami $f(x) = \sin^2(\pi x)$,
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(2^n x)}{2^{(1+\alpha)n}}.$$
Wykazać, że g jest funkcją klasy $C^1(\mathbb{R})$.

Fakultatywne [2 pkt]: Wykazać, że pochodna g' funkcji g spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α, tzn.
$$\exists C > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |g'(x) - g'(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha.$$

Fakultatywne [3 pkt]: Wykazać, że dla każdego $\beta > \alpha$ funkcja g' nie spełnia warunku Höldera z wykładnikiem $\beta > \alpha$ w żadnym punkcie, tzn.

$$\forall \beta > \alpha \; \forall x \in \mathbb{R} \qquad \limsup_{y \to x} \frac{|g'(x) - g'(y)|}{|x-y|^{\beta}} = \infty \, .$$

Uwaga: Rozwiązania dwóch ostatnich fakultatywnych zadań można prezentować na konsultacjach. Proszę nie oddawać wersji pisemnych. Termin: do końca semestru.