1. **[0,6 pkt]** Niech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie różniczkowalna i taka, że pochodna $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła. Dla $n\in\mathbb{N}_+$ definiujemy

$$g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\qquad g_n(x)=n\Big(f(x+1/n)-f(x)\Big)\,.$$

Udowodnić, że ciąg $\{g_n : n\in\mathbb{N}_+\}$ jest jednostajnie zbieżny do f'.

2. **[0,6 pkt]** Udowodnić, że kwadrat jednostkowy $[0,1]^2\subseteq\mathbb{R}^2$ jest zwartym podzbiorem $\mathbb{R}^2$, tzn. pokazać, że dla dowolnego ciągu par $\{(x_n,y_n)\in[0,1]^2 : n\in\mathbb{N}\}$ można znaleźć *jedną* funkcję ściśle rosnącą $n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ taką, że obydwa ciągi $\{x_{n(k)} : k\in\mathbb{N}\}$ oraz $\{y_{n(k)} : k\in\mathbb{N}\}$ są zbieżne.
Wskazówka: Jeśli nieskończenie wiele przedmiotów ulokowaliśmy w skończenie wielu szufladach, to w co najmniej jednej szufladzie jest nieskończenie wiele przedmiotów.

3. **[0,6 pkt]** Zbadać zbieżność jednostajną na $\mathbb{R}$ szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^2\exp(-n^2|x|)\,.$$

4. **[0,6 pkt]** Zbadać zbieżność jednostajną na $\mathbb{R}$ szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}(n^2(1+x^2))\,.$$

Wskazówka: Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty}x\Big(\tfrac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x\Big)\,.$$

5. **[0,6 pkt]** Zbadać czy funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg}\Big(\frac{x-n}{\sqrt{n}\ln n}\Big)+\frac{\pi}{2}}{n^{3/2}\ln n}$$

jest dobrze określona, ciągła i różniczkowalna.
Errata 09.05.2017: W oryginalnym sformułowaniu był błąd. Składnik sumy odpowiadający $n=1$ zawiera dzielenie przez zero. Należy zacząć sumowanie od $n=2$.