1. **[0,5 pkt]** Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną ciągu

$$f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad f_n(x) = n\Big(\sqrt[n]{x} - 1\Big)\,.$$

2. **[0,5 pkt]** Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną ciągu

$$f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}\,, \qquad f_n(x) = \exp\left(-\sqrt{n}(x - \tfrac{1}{n})^2\right)\,.$$

3. **[0,5 pkt]** Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną ciągu

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f_n(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\,.$$

4. **[1,5 pkt]** Niech $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $a_n \in \mathbb{R}$ oraz $S_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ będą dane przez

$$f(x) = \operatorname{ar\,tgh}(x)\,, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,, \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}\,.$$

   (a) Wyznaczyć pochodną f' funkcji f.

   (b) Wyznaczyć wartości a_n dla $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Udowodnić, że ciąg S_n jest niemal jednostajnie zbieżny.

   (d) Udowodnić, że

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} S_n'(x) \quad \text{oraz} \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$$

   dla wszystkich $x \in (-1, 1)$.

   (e) Znaleźć liczbę wymierną q taką, że $|q - f(1/3)| < 10^{-3}$. Uzasadnić, że znalezione przybliżenie spełnia podaną nierówność.

Wskazówka: Można korzystać z następującego twierdzenia: jeśli ciąg pochodnych g_n' pewnego ciągu funkcji różniczkowalnych $g_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji h oraz $g_n(x_0)$ jest zbieżny dla pewnego ustalonego punktu $x_0 \in (a, b)$, to g_n jest zbieżny niemal jednostajnie do pewnej funkcji różniczkowalnej $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ takiej, że $g' = h$.