

1. [0,6 pkt] Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(\sin(x^2)) - \cos(x) - \frac{3}{2}x^2}{(x^{-2} + 1/2) \ln(1 + x^2) - 1}.$$

2. [0,6 pkt] Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x(\cos x - \ln(1 - x^2/3)) + \frac{4}{45}x^5}{\operatorname{tg} x - \sin(x) \cos(x) - x^3}.$$

3. [0,6 pkt] Znajdź liczbę wymierną q taką, że $|q - \sqrt[3]{30}| < 10^{-4}$. Uzasadnij, że znaleziona liczba przybliża $\sqrt[3]{30}$ z wymaganą dokładnością.

4. [0,6 pkt] Niech $p \in (-1, 1)$. Oblicz granicę

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \binom{p}{k} \right|}{\ln k}.$$

5. [0,6 pkt] Udowodnij tożsamość

$$\sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^l \binom{-1/3}{n-l} \binom{-1/3}{l-k} \binom{-1/3}{k} = (-1)^n.$$

prawdziwą dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Przypomnienie: Symbol dwumianowy jest zdefiniowany następująco

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1) \cdots (p-k+1)}{k!} = (-1)^k \prod_{j=1}^k \frac{j-(p+1)}{j} \quad \text{dla } p \in \mathbb{R} \text{ oraz } k \in \mathbb{N}.$$