1. **[0,6 pkt]** Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie wypukła i ciągła. Definiujemy funkcję $m : [a, b] \to \mathbb{R}$ wzorem
$$m(x) = \sup\{f(y) : y \in [a, x]\}\,.$$
Udowodnić, że m jest wypukła.
2. **[0,6 pkt]** Znaleźć minimum objętości stożków opisanych na trójwymiarowej kuli jednostkowej (tzn. o promieniu 1).
3. **[0,6 pkt]** Zbadać wypukłość/wklęsłość funkcji $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ danej wzorem
$$f(x) = \sqrt{1 + x^2} - \log\big(x^{-1} + \sqrt{1 + x^{-2}}\big)\,.$$
4. **[0,6 pkt]** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzi funkcją ciągłą spełniającą
$$f(x) = \exp\left(\frac{(1 - x)(7 - x)}{|x - 3| \cdot |x - 5|}\right) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R} \setminus \{3, 5\}\,.$$
Wyznacznyć ekstrema lokalne i globalne, asymptoty, miejsca zerowe oraz punkty różniczkowalności funkcji f.
5. **[0,6 pkt]** Wykazać, że dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzą nierówności
$$\cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2}\,, \quad \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\,, \quad \cos(x) > 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\,.$$
Wskazówka: Można skorzystać z twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej.