

1. **[0,6 pkt]** Niech

$$f(x) = \frac{1}{\sin(1/x)}, \quad \varphi(x) = \operatorname{arctg}(x), \quad \psi(x) = x^2(1 - \cos(1/x)).$$

Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x + \varphi(x)) - f(x + \psi(x)).$$

Wskazówka: Można skorzystać z twierdzenia o wartości średniej.

2. **[0,6 pkt]** Udowodnić, że funkcja

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{\operatorname{arctg}(x)}}$$

jest jednostajnie ciągła na przedziale $(0, \infty)$.

Wskazówka: Jeśli pochodna funkcji różniczkowalnej jest ograniczona, to funkcja ta spełnia warunek Lipschitza.

3. **[0,6 pkt]** Niech $m, n \in \mathbb{N}$. Znaleźć wszystkie ekstrema funkcji

$$f(x) = \sin^{2m}(x) \cos^{2n}(x).$$

4. **[0,6 pkt]** Dla $x \in [0, \pi/2)$ udowodnić nierówność

$$\sin(x) + \operatorname{tg}(x) \geq 2x.$$

5. **[0,6 pkt]** Załóżmy, że $0 < a < b$ oraz $A = (0, a) \in \mathbb{R}^2$, $B = (0, b) \in \mathbb{R}^2$. Dla $x \in (0, \infty)$ niech $C(x) = (x, 0)$ oraz $\gamma(x)$ będzie kątem przy wierzchołku $C(x)$ trójkąta $\triangle(A, B, C(x))$. Znaleźć $x \in (0, \infty)$ dla którego $\gamma(x)$ jest największy.