

1. [0,4 pkt] Wyznaczyć pochodną funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \ln \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{\exp(3x + 10)}{2 + x^4} \right) \right).$$

2. [0,5 pkt] Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \frac{3^x \cos(x) + \arcsin(x)}{1 + x^2 + x^4 + x^8}$$

w punkcie $(0, f(0)) = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$.

3. [0,7 pkt] Wyznaczyć ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = (x + 3)^7 \sqrt[6]{(x - 10)^2}.$$

Naszkić wykres.

Uwaga: $\sqrt{x^2} = |x|$ nie jest różniczkowalna w 0.

4. [0,6 pkt] Wyznaczyć ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji $f : \mathbb{R} \setminus \{-7\} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) = \frac{\exp(x)}{x + 7}.$$

Naszkić wykres.

5. [0,8 pkt] Funkcja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i różniczkowalna na $(0, \infty)$. Ponadto wiadomo, że istnieje granica

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = g \in \mathbb{R}.$$

Udowodnić, że wówczas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(1/x)(f(2x) - f(x)) = g.$$