Analiza matematyczna II.1, 2011/2012

Seria VII$^+$: 16 grudnia 2011r.

Poniższe zadania należy przygotować na kolejne zajęcia, a te których nie zdążymy zrobić na następne.

1. Niech $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem
$$F(x, y) = x^3y^2 + 3x^2y^3 - xy + 2x - y^2 + 1\,.$$
   - Wykazać, że istnieją funkcje rzeczywiste $g, h \in C^1(U)$, gdzie $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$ takie, że $F(x, g(x)) = 0 = F(x, h(x))$ oraz $g(x) < h(x)$ dla $x \in U$. Znaleźć $g'(0)$ i $h'(0)$.
   - Wykazać istnienie funkcji $k \in C^1(U)$, gdzie $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$ takiej, że $F(k(y), y) = 0$ dla $y \in U$. Obliczyć $k'(0)$.

2. Niech $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem
$$F(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x + y + z - tx^3z \\ z - x - t + x^2yz^3 \end{pmatrix}.$$
Wykazać, że istnieje zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}^2$ zawierający punkt $(0, 0)$ oraz funkcja $g = (g_1, g_2) \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ taka, że $F(g_1(y, t), y, g_2(y, t), t) = 0$ dla $(y, t) \in U$. Znaleźć $Dg(0, 0)$.

3. Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz $F \in C^1(U)$ będzie taka, że $D_nF(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in U$. Połóżmy $S = F^{-1}(0)$ i załóżmy, że $S \neq \emptyset$.
   - Niech $n = 2$ oraz $U = \mathbb{R}^2$. Wykazać, że istnieje zbiór otwarty $V \subseteq \mathbb{R}$ i funkcja $g \in C^1(V, R)$ taka, że $(x, g(x)) \in U$ dla $x \in V$ oraz $S = \{(x, g(x)) : x \in V\}$.
   - Niech $n = 2$ ale teraz $U \subseteq \mathbb{R}^2$ może być dowolnym zbiorem otwartym. Czy S musi być wykresem pewnej funkcji g tak jak to miało miejsce w poprzednim podpunkcie? Czy coś się zmieni jeśli założymy dodatkowo, że S jest spójny?
   - Niech $n = 3$ oraz $U \subseteq \mathbb{R}^3$ będzie dowolnym, spójnym zbiorem otwartym. Ponadto zakładamy, że S jest spójny. Czy S jest wykresem funkcji $g \in C^1(V)$, gdzie $V \subseteq \mathbb{R}^2$ jest pewnym zbiorem otwartym?

4. Niech $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otwarty oraz $F \in C^1(U)$. Ponadto niech $g, h \in C^1(V)$ będą takie, że $F(x, g(x)) = 0 = F(x, h(x))$ dla wszystkich $x \in V$, gdzie $V \subseteq \mathbb{R}$ jest pewnym przedziałem otwartym. Wykazać, że jeśli istnieje punkt $x_0 \in V$ taki, że $g(x_0) = h(x_0)$ to $g(x) = h(x)$ dla wszystkich $x \in V$.

5. Wykazać, że równanie
$$z^3 - xyz + y^2 = 16$$

wyznacza w otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (1, 4, 2)$ dokładnie jedną funkcję $z = z(x, y)$. Obliczyć

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,4) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,4)\,.$$

6. Niech $P(x, y) = y^5 + e^x y + \ln x$. Sprawdzić, że dla każdego $x \in (0, \infty)$ wielomian $P(x, y)$ zmiennej y ma dokładnie jeden pierwiastek rzeczywisty $\varphi(x)$. Wykazać, że funkcja $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 i obliczyć $\varphi'(1)$.

7. Uzasadnić, że w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$ równanie

$$xe^w = y^2 + 2w$$

wyznacza zmienną w jednoznacznie jako funkcję pozostałych dwóch zmiennych $w = w(x, y)$, oraz że jest to funkcja klasy C^2. Wypisać wielomian Taylora dla funkcji w w punkcie $(1, -1)$ do wyrazów drugiego rzędu.

8. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$, $F : A \to A$ niech będzie klasy C^1 oraz $\det(DF(x, y)) \neq 0$ dla wszystkich $(x, y) \in A$. Załóżmy ponadto, że $F^{-1}(u, v)$ jest zbiorem skończonym dla wszystkich $(u, v) \in A$. Pokazać, że moc zbioru $F^{-1}(u, v)$ jest stała dla wszystkich $(u, v) \in A$.