Analiza matematyczna II.1, 2011/2012

Seria VI: 5 grudnia 2011r.

Poniższe zadania należy przygotować na zajęcia **12 grudnia 2011r**. Przy sporządzaniu listy należy zaznaczyć, które zadania się zrobiło.

1. Niech

$$\begin{aligned} G &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > \max(x, -x(2+\sqrt{3}))\} \\ \text{oraz} \quad H &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}\,. \end{aligned}$$

   Znajdź dyfeomorfizm klasy C^1 przekształcający G na H.

   Wskazówka: $2+\sqrt{3} = \operatorname{tg} 75^\circ$.

2. Niech $n \geqslant 3$. Rozważmy zbiór

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

   oraz funkcję

$$F(x_1, \ldots, n_n) = \left(\frac{x_1^2}{x_2}, \frac{x_2^2}{x_3}, \ldots, \frac{x_{n-1}^2}{x_n}, \frac{x_n^2}{x_1} \right).$$

   Wykazać, że F jest dyfeomorfizmem zbioru A na ten sam zbiór.

3. Przekształcenie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest dyfeomorfizmem klasy C^1 przekształcającym zbiór

$$A = \{(x,y) : y = 0\} \quad \text{na zbiór} \quad B = \{(x,y) : y = x^2\}\,.$$

   Udowodnić, że

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} (\|DF(x)\| + \|DF^{-1}(x)\|) = \infty\,.$$

4. Niech $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 = 1\}$ oraz $R = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_\infty = 1\}$. Udowodnić, że nie istnieje dyfeomorfizm $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ taki, że $f(S) = R$.