Seria II: 17.10.2011r.

Dane są funkcje

$$f(x,y) = \frac{y^2}{y^2 + (x - y^2)^2}\,,$$
$$g(x,y) = f(x,y)(x+y)$$
$$\text{oraz} \quad h(x,y) = |x|^{\ln|y|}\,,$$

których dziedziną jest zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\,, y \neq 0\}$.

1. Obliczyć granice iterowane

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} k(x,y) \quad \text{i} \quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} k(x,y)\,,$$

   gdzie $k \in \{f, g, h\}$.

2. Obliczyć granice funkcji f, g i h w punkcie $(0,0)$ wzdłuż prostej opisanej równaniem $Ax + By = 0$, gdzie $A, B \in \mathbb{R}$.

3. Stwierdzić i uzasadnić czy istnieje granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} k(x,y)\,,$$

   gdzie $k \in \{f, g, h\}$.

4. Dla funkcji $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wielu zmiennych definiujemy *granicę w nieskończoności* w następujący sposób

$$\lim_{|x|\to\infty} j(x) = a \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\varepsilon > 0\, \exists C > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad |x| > C \Rightarrow |j(x) - a| \leqslant \varepsilon\,.$$

   Zbadać istnienie granicy w nieskończoności funkcji f i g.