Seria I: 10.10.2011r.

1. Na przestrzeni $\mathbb{R}^2$ dana jest pewna norma $\|\cdot\|$. Niech $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| = 1\}$ będzie sferą jednostkową w tej normie. Wiadomo, że

   - S jest elipsą,
   - $\|(2,1)\| = 1$,
   - $\|(2,-4)\| = 1$,
   - $\sup\{x^2 + y^2 : (x,y) \in S\} = 20$
   - oraz $\inf\{x^2 + y^2 : (x,y) \in S\} = 5$.

   (a) Znaleźć wzór wyrażający normę $\|(x,y)\|$.

   (b) Stwierdzić czy norma $\|\cdot\|$ pochodzi od iloczynu skalarnego. Odpowiedź uzasadnić.

2. Na przestrzeni $\mathbb{R}^2$ mamy zdefiniowaną normę $\|\cdot\|$. Symbolem $\mathbb{B}\big((x,y),r\big)$ będziemy oznaczać zwykłą, Euklidesową kulę w $\mathbb{R}^2$, czyli

   $$\mathbb{B}\big((x,y),r\big) = \{(z,t) \in \mathbb{R}^2 : (z-x)^2 + (t-y)^2 < 1\}\,.$$

   Kula w normie $\|\cdot\|$ spełnia

   $$B = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\} = \Big((-1,1) \times (-1,1)\Big) \cup \mathbb{B}\big((1,0),1\big) \cup \mathbb{B}\big((-1,0),1\big)$$

   (czyli B ma kształt stadionu olimpijskiego). Stwierdzić czy norma $\|\cdot\|$ pochodzi od iloczynu skalarnego. Odpowiedź uzasadnić.

3. Dany jest ciąg wektorów $v_k = (v_k^1, \ldots, v_k^n) \in \mathbb{R}^n$. Wiadomo, że współrzędne v_k zbiegają do zera, tzn. $\lim_{k\to\infty} v_k^j = 0$ dla każdego $j = 1, \ldots, n$. Udowodnić, że ciąg wektorów v_k zbiega do wektora zerowego w dowolnej normie $\|\cdot\|$.

   Uwaga! Nie wolno korzystać z twierdzenia o równoważności norm.

4. Rozważmy dwie normy na przestrzeni $\mathbb{R}^n$

   $$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_i| \quad \text{oraz} \quad \|x\|_\star\,.$$

   Ciąg wektorów $v_k \in \mathbb{R}^n$ zbiega w normie $\|\cdot\|_1$ do wektora $v \in \mathbb{R}^n$, a w normie $\|\cdot\|_\star$ do wektora $w \in \mathbb{R}^n$, tzn.

   $$\|v_k - v\|_1 \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \text{oraz} \quad \|v_k - w\|_\star \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

   Pokazać, że $v = w$.

   Uwaga! Nie wolno korzystać z twierdzenia o równoważności norm.

5. Opisać wszystkie możliwe normy na prostej $\mathbb{R}^1$.