Analiza matematyczna I.1, 2011/2012

Seria VIII: 21 grudnia 2011r.

Termin oddania: **3 stycznia 2012r.**

Ze względu na święta, poniższe zadania należy traktować jako fakultatywne. Zrobienie ich będzie punktowane na plus ale niezrobienie nie będzie skutkowało na minus. Punkty za te zadania zaliczę do oddzielnej kategorii. Z drugiej strony, uważam, że warto je zrobić dla głębszego zrozumienia materiału.

1. Funkcja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ spełnia warunek

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|f(3x)|\,. \tag{1}$$

dla wszystkich $x \in [0, \infty]$.

(a) **[1 pkt]** Wykazać, że nie musi istnieć granica $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) **[1 pkt]** Wykazać, że jeśli istnieje granica $\lim_{x\to 0} f(x)$ to f musi być ciągła w 0.

(c) **[1 pkt]** Pokazać, że jeśli f jest ograniczona, tzn.

$$\exists M > 0\, \forall x \in [0, \infty) \quad |f(x)| \leqslant M\,, \tag{2}$$

to musi być funkcją stałą równą 0.

2. Funkcja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ spełnia warunek (1) tylko dla $x \in (0, 1)$ oraz jest ograniczona (tzn. spełnia (2)).

(a) **[1 pkt]** Pokazać, że istnieje granica $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) **[1 pkt]** Pokazać, że f nie musi być ciągła w 0 i nie musi być stała.

3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest 2^k-okresowa dla każdego $k \in \mathbb{Z}$, tzn.

$$\forall k \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(x + 2^k)\,. \tag{3}$$

(a) **[1 pkt]** Pokazać, że f nie musi być funkcją stałą.

(b) **[1 pkt]** Pokazać, że jeśli dodatkowo założymy, że f jest ciągła, to f musi być funkcją stałą.

Wskazówka: Zbiór liczb *dwójkowo wymiernych*, tj. zbiór $\mathbb{Q}_2 = \{k2^l : k, l \in \mathbb{Z}\ \}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$, tzn. każdą liczbę $x_0 \in \mathbb{R}$ można uzyskać jako granicę ciągu (x_n) o elementach w $\mathbb{Q}_2$. W istocie wystarczy za (x_n) przyjąć kolejne rozwinięcia liczby x_0 w systemie dwójkowym (binarnym) dokładnie tak jak się to robi w systemie dziesiętnym.

4. Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ograniczona, tzn. spełnia (2). Definiujemy dwie nowe funkcje

$$\begin{aligned} m_f : [a,b] \to \mathbb{R} &\quad m_f(x) = \inf\{f(y) : y \in [a,x)\} \\ \text{oraz} \quad M_f : [a,b] \to \mathbb{R} &\quad M_f(x) = \sup\{f(y) : y \in [a,x)\}\,. \end{aligned}$$

(a) **[1 pkt]** Pokazać, że funkcje m_f i M_f są lewostronnie ciągłe, tzn.

$$\forall x \in [a,b] \qquad \lim_{z \to x^-} f(z) = f(x)\,. \tag{4}$$

Wskazówka: Przyjrzeć się funkcjom m_f i M_f dla $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, a następnie przeprowadzić formalny dowód dla dowolnej f spełniającej założenia zadania.

(b) **[1 pkt]** Pokazać, że jeśli f jest ciągła, to funkcje m_f i M_f też są ciągłe.

5. **[1 pkt]** Mówimy, że zbiór[1] A jest *przeliczalny* jeśli wszystkie jego elementy da się ustwić w ciąg, czyli $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Inaczej można powiedzieć, że A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja „na" $a : \mathbb{N} \to A$ - wówczas kładziemy $a_n = a(n)$ i widzimy, że te dwie definicje mówią o tym samym.

   Niech zbiór I będzie przeliczalny oraz $\{A_i : i \in I\}$ niech będzie rodziną zbiorów przeliczalnych indeksowaną elementami zbioru I. Pokazać, że suma mnogościowa tych wszystkich zbiorów, tj. zbiór

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$$

   zdefiniowany warunkiem

$$a \in \mathcal{A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists i \in I \;\, a \in A_i$$

   też jest zbiorem przeliczalnym.

   Inaczej mówiąc: *przeliczalna suma zbiorów przeliczalnych jest przeliczalna.*

   Wskazówka: Przypomnieć sobie jak się dowodzi, że $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny.

6. Funkcja *zeta Riemanna* $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^s}\,.$$

   (a) **[1 pkt]** Pokazać, że funkcja ζ spełnia tożsamość

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\zeta(k) - 1) = 1\,.$$

   (b) **[1 pkt]** Niech $\mathcal{P}$ oznacza zbiór wszystkich liczb pierwszych. Pokazać, że zachodzi wzór

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}\,.$$

   Wskazówka: Suma szeregu geometrycznego.

[1] Uwaga! Przez „zbiór" rozumiemy *dowolny* zbiór, a niekoniecznie zbiór liczb. Może to być np. zbiór studentów UW albo zbiór różowych słoni.