Analiza matematyczna I.1, 2011/2012

Seria VII: 13 grudnia 2011r.

Termin oddania: **20 grudnia 2011r.**

1. [**1 pkt**] Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!e^n}\,.$$
Wskazówka: skorzystać z kryterium zbieżności z wykładu.

2. [**1 pkt**] Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{(n \bmod 2)+1}\,.$$

3. [**1 pkt**] Obliczyć wartość wyrażenia
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)}\,.$$
Wskazówka: Przekształcenie Abela.

   Uwaga! Można uznać, że liczby harmoniczne $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ są znanymi liczbami, tzn. nie muszą być upraszczane.

4. [**1 pkt**] Niech $a, b \in \mathbb{N}$ będą ustalonymi liczbami naturalnymi. Obliczyć iloczyn Cauchy'ego szeregów
$$\sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{j} z^j \quad \text{oraz} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \binom{b}{j} z^j\,.$$
Następnie udowodnić, że
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}\,.$$
Wskazówka: Dwa wielomiany są sobie równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają identyczne współczynniki przy odpowiadających potęgach zmiennej.

   Uwaga! Ostrożnie obchodzić się z indeksami sumowania!

   Uwaga! Stosujemy tu uogólnioną definicję Dwumianu Newtona, gdzie $\binom{n}{k}$ dla $k > n$ jest równe 0.

   Uwaga! Dowód w drugiej części zadania może, choć nie musi, korzystać z pierwszej części zadania. W szczególności poprawny dowód przeprowadzony przez tzw. *interpretację kombinatoryczną* jest poprawny.