Analiza matematyczna I.1, 2011/2012

Seria V: 22 listopada 2011r.

Termin oddania: **29 listopada 2011r.**

1. [**1 pkt**] Sprawdzić czy ciąg
$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$
spełnia warunek Cauchy'ego. Czy ciąg a_n jest zbieżny?

2. [**1 pkt**] Wykazać, że ciąg
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$
spełnia warunek Cauchy'ego. Czy ciąg a_n jest zbieżny?

   Wskazówka: Skorzystać z poprzedniego zadania.

3. [**1 pkt**] Dane są trzy liczby dodatnie $a, b, c \in \mathbb{R}_+$. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n}\left(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}\right)^n .$$
Wskazówka: Jeśli $na_n \to g \in \mathbb{R}$, to $(1+a_n)^n \to \exp(g)$.

4. [**1 pkt**] Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^7+7n^4+47}{4n^7+3n^5+53}\right)^{\frac{n^3\sqrt{n+8}-2011n+1}{97\sqrt{n^3+2n^2+n}+24}} .$$

5. [**1 pkt**] Dane są dwa ciągi
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \quad \text{oraz} \quad b_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)\,.$$
Wykazać, że obydwa są zbieżne do tej samej granicy (jest to tzw. *stała Eulera* γ).

   Wskazówka: Zbadać monotoniczność.