Analiza matematyczna I.1, 2011/2012

Seria IV: 15 listopada 2011r.

Termin oddania: **22 listopada 2011r.**

1. [**1 pkt**] Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt[3]{n}}-\sqrt{n+7}}{\sqrt[3]{3n}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1})}\,.$$

2. [**1 pkt**] Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+3n^2-12n+5}{n^3+5n^2-7n+1}\right)^n\,.$$

3. [**1 pkt**] Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^5}{\sqrt[n]{(3n!)^5}}\,.$$

4. [**2 pkt**] Dane są liczby rzeczywiste dodatnie a i b. Definiujemy ciągi

$$\begin{aligned} & x_1 = a\,, \qquad && x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n+y_n) \\ \text{oraz}\quad & y_1 = b\,, \qquad && y_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{x_n}+\frac{1}{y_n}}\,. \end{aligned}$$

Wykazać, że ciągi x_n i y_n są zbieżne oraz

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n\,.$$

Wskazówki:

- jeśli $na_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, to $(1+a_n)^n \xrightarrow{n\to\infty} 1$,
- jeśli $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} g \in \mathbb{R}$, to $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} g$,
- średnia jest średnią.