# Analiza matematyczna I.1, 2011/2012

## Seria II: 19.10.2011r.

*Termin oddania:* **25 października 2011r.**

1. [**1 pkt**] Wyznaczyć kresy zbioru
$$A = \left\{ \frac{k - l^2 - m^2}{k + l^2 + m^2} : k, l, m \in \mathbb{N}\,; k \leqslant l < m \right\}$$
*Wskazówka:* Ustalić wartości $l$ i $m$ i rozpatrzyć zbiory $A_{l,m}$.

2. [**1 pkt**] Stwierdzić i uzasadnić czy podane niżej liczby są wymierne, czy niewymierne
$$\sqrt{17 + \sqrt{13 + \sqrt{11}}} \quad \text{oraz} \quad \sqrt{8 + \sqrt{35}} + \sqrt{12 + \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}}\,.$$
*Wskazówka:* Rozpatrzyć sumę i iloczyn pewnych liczb.

3. [**1 pkt**] Dany jest zbiór $A \subseteq \mathbb{R}_+$, o którym wiadomo, że
$$\sup A = M \notin A \quad \text{oraz} \quad \inf A = m \notin A\,.$$
Definiujemy zbiór $B \subseteq \mathbb{R}$ warunkiem: liczba $b$ należy do zbioru $B$ wtedy i tylko wtedy gdy $b = \sqrt[k]{a_1 \cdots a_k}$ dla pewnych parami różnych liczb $a_1, \ldots, a_k \in A$, gdzie $k \geqslant 2$. Można to wyrazić wzorami
$$B_k = \left\{ \sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} : \forall_{i \in \{1,\ldots,k\}}\ a_i \in A\,; \forall_{i,j \in \{1,\ldots,k\}}\ i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j \right\}$$
$$\text{oraz} \quad B = \bigcup_{k=2}^{\infty} B_k\,.$$
Wyznaczyć kresy zbioru $B$.
*Wskazówka:* Średnia geometryczna nie bez powodu nazywa się „średnią”.

4. [**1 pkt**] Dany jest ograniczony zbiór $A \subseteq (0, \infty)$. Wiadomo, że $\inf A = I < S = \sup A$. Kładziemy
$$B_k = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{2^j} : \forall_{j \in \{1,\ldots,k\}}\ a_j \in A \right\} \quad \text{oraz} \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\,.$$
Wyznaczyć kresy zbioru $B$.
*Wskazówka:* $\sum_{j=1}^{k} 2^{-j} = 1 - 2^{-k}$.

5. [**1 pkt**] Dane są ciągi liczbowe
$$a_n = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \quad \text{oraz} \quad b_n = \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+1}\,.$$
Wykazać, że $a_n$ i $b_n$ są monotoniczne.
*Wskazówka:* AGH