Równania różniczkowe cząstkowe I, 2011/2012

Seria III: Równanie falowe.

1. Znajdź rozwiązania ogólne równań
$$2u_{xx} - 5u_{xy} + 3u_{yy} = 0\,,$$
$$2u_{xx} + 6u_{xy} + 4u_{yy} + u_x + u_y = 0\,.$$

2. Niech $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem równania
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,. \tag{1}$$
   - Wykaż, że jeśli
   $$u(x,0) = 0 \quad \text{oraz} \quad u_t(x,0) = xe^{-x^2}$$
   to u spełnia oszacowanie
   $$|u(x,t)| \leqslant \frac{1}{2c} \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+\,.$$
   - Znajdź szczególne rozwiązanie (1) spełniające
   $$u(x,0) = 0 \quad \text{oraz} \quad u_t(x,0) = \sin x\,.$$
   - Znajdź szczególne rozwiązanie (1) spełniające
   $$u(x,0) = f(x) \quad \text{oraz} \quad u_t(x,0) = 0\,,$$
   $$\text{gdzie} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 1 \\ 1 + x & -1 < x \leqslant 0 \\ 1 - x & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$
   Przeanalizuj zachowanie u w zależności od czasu.

3. Niech u będzie rozwiązaniem (1) spełniającym
$$u(x,0) = \phi(x) \quad \text{oraz} \quad u_t(x,0) = \psi(x)\,.$$
Pokaż, że jeśli ϕ i ψ są nieparzyste, to $u(0,t) = 0$, a gdy ϕ i ψ są parzyste, to $u_x(0,t) = 0$.

4. Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$$
$$u(x,0) = 0 \quad \text{oraz} \quad u_t(x,0) = 0\,.$$
Pokaż, że jeśli $f(x,t) = -f(-x,t)$, to $u(0,t) = 0$, a gdy $f(x,t) = f(-x,t)$ to $u_x(0,t) = 0$.

5. Korzystając z poprzednich zadań rozwiąż zagadnienie
$$\begin{aligned} & u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{dla } x > 0, t > 0 \\ & u(0,t) = 0 \quad \text{dla } t > 0 \\ & u(x,0) = \phi(x) \quad \text{dla } x > 0 \\ \text{oraz} \quad & u_t(x,0) = \psi(x) \quad \text{dla } x > 0\,, \end{aligned}$$
gdzie u jest określona na zbiorze $\{(x,t) : x \geqslant 0, t \geqslant 0\}$

6. Znajdź rozwiązanie zagadnienia

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = \sin x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, t > 0\\
&u(x,0) = \sin x\\
&u_t(x,0) = \tfrac{1}{2}x^2 .
\end{aligned}
$$

7. Znajdź rozwiązanie zagadnienia

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = \cos x \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, t > 0\\
&u(x,0) = \tfrac{1}{2}x^2\\
&u_t(x,0) = \sin x .
\end{aligned}
$$

8. Znajdź rozwiązanie zagadnienia

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, t > 0\\
&u(x,0) = f(x)\\
&u_t(x,0) = 0 ,
\end{aligned}
$$

$$
\text{gdzie} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geqslant 2\pi \\ \sin^3 x & |x| \in (\pi, 2\pi) \\ 0 & x \in [-\pi, \pi] \end{cases}
$$

Przeanalizuj zachowanie u w zależności od czasu.

Uwaga! Sprawdź czy stosuje się tutaj wzór d'Alemberta, tj. czy f jest klasy C^2.

9. Niech u będzie rozwiązaniem zagadnienia

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, t > 0\\
&u(x,0) = e^{-x^2}\\
&u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2} \sin x .
\end{aligned}
$$

Czy $u(x,t)$ zbiega niemal jednostajnie do zera dla $t \to \infty$?

10. Niech U będzie ograniczony, otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^3$ z gładkim brzegiem. Połóżmy $U_T = U \times (0, T]$ oraz $\Gamma_T = \partial U_T \setminus U_T$, gdzie $T > 0$. Wykazać, że zagadnienie Cauchy'ego

$$
\begin{aligned}
&u_{tt} - \Delta_x u = h \quad \text{w } U_T\\
&u = f \quad \text{na } \Gamma_T\\
&u_t = g \quad \text{na } U \times \{t = 0\}
\end{aligned}
$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie.

Wskazówka: Rozważyć funkcjonał „energii"

$$
E(w;t) = \int_U w_t^2 + |\nabla_x w|^2 \, dx .
$$