Równania różniczkowe cząstkowe I, 2011/2012

Seria II: Wzór Gaussa-Greena, czyli całkowanie przez części.

Poniżej $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ zawsze oznacza otwarty i ograniczony zbiór z brzegiem $\partial\Omega$ będącym rozmaitością klasy C^1. Ponadto σ oznacza miarę powierzchniową na $\partial\Omega$, a $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ to wektor normalny zewnętrzny do brzegu $\partial\Omega$.

Twierdzenie (Twierdzenie Gaussa-Greena)**.** *Niech $u \in C^1(\Omega)$. Wówczas zachodzi wzór*

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i \, d\sigma \,.$$

1. Niech $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ będzie polem wektorowym. Pokaż, że

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu\rangle \, d\sigma \,.$$

2. Pokaż, że $\operatorname{div}(\nabla) = \Delta$.

3. Niech $u, w \in C^2(\Omega)$. Wyprowadź wzory

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma \,, \\
&\int_\Omega \langle Du, Dw\rangle\, dx = -\int_\Omega u\Delta w\, dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial w}{\partial \nu}\, d\sigma \,, \\
&\int_\Omega u\Delta w - w\Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma \,.
\end{aligned}$$

4. Niech $u, w \in C^1(\Omega)$ i niech u ma zwarty nośnik w Ω, czyli

$$\operatorname{spt}(u) := \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}} \quad \text{jest zwartym podzbiorem } \Omega \,.$$

   Pokaż, że

$$\int_\Omega u\frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega w\frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx \,.$$

5. Niech $u, v \in C^2(\Omega)$ będą takie, że $\Delta u = 0 = \Delta v$. Pokaż, że

$$\int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\sigma = 0 \,.$$

6. Pokaż, że Twierdzenie Gaussa-Greena jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia Stokesa dla form różniczkowych

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \,,$$

   gdzie M jest pewną C^1-gładką, zorientowaną, n-wymiarową rozmaitościa z brzegiem (np. $M = \Omega$), d oznacza różniczkę zewnętrzną, a ω to $(n-1)$-forma na M.