Równania różniczkowe cząstkowe I, 2011/2012

Seria I: Równania pierwszego rzędu. Metoda charakterystyk i całki pierwsze.

1. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} &xu_x + (x+y)u_y + (x+z)u_z = x+y+z \\ &u(x,y,0) = y - x\,. \end{aligned}$$

2. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} &uu_x - u_y = u - 1 \\ &u(x,x) = 2x\,. \end{aligned}$$

3. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 1 \\ &u(x,0) = kx \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

4. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} &u_x^2 + u_y^2 = 1 \quad \text{dla } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}(0,1) \\ &u(x,y) = 0 \quad \text{dla } (x,y) \in \partial\mathbb{B}(0,1)\,. \end{aligned}$$

5. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} &u_x + u_y = u^2 \\ &u(x,-x) = x\,. \end{aligned}$$

6. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} &u_x u_y = u \quad \text{dla } (x,y) \in \Omega := \{(x,y) : x > 0\} \\ &u(0,y) = y^2\,. \end{aligned}$$

7. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} &-yu_x + xu_y = 1 \\ &u(x,0) = x \quad \text{dla } x > 0\,. \end{aligned}$$

8. Znajdź rozwiązanie równania

$$x(y^2+u)u_x - y(x^2+u)u_y = (x^2-y^2)u\,,$$

którego wykres zawiera prostą $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0, z=1\}$.

9. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$\begin{aligned} &x^2u_x + y^2u_y = (x+y)u \\ &u(x, \tfrac{1}{2}x) = 1 \quad \text{dla } x > 0\,. \end{aligned}$$

10. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego

$$u_x + u_y = -u^2$$
$$u(0, x) = g(x)\,.$$

11. Znajdź rozwiązania równań

$$xzu_x - yzu_y = y^2 - x^2$$
$$y^2 u_x - xyu_y = x(z - 2y)$$
$$xzu_x + yzu_y = -xy\,,$$

których wykresy zawierają proste dane przez

$$\phi(t) = (t, t/2, 0)$$
$$\phi(t) = (t, t, t)$$
$$y = x^2\,, z = x^3\,.$$

12. Pokaż, że ogólne rozwiązanie równania

$$yu_x - xu_y = 0$$

ma postać

$$u(x, y) = \Phi(x^2 + y^2)\,,$$

gdzie Φ jest dowolną funkcją.

13. Pokaż, że ogólne rozwiązanie równania

$$xu_x - 2yu_y - zu_z = 0$$

ma postać

$$u(x, y) = \Phi(xz, x\sqrt{y})\,,$$

gdzie Φ jest dowolną funkcją.

14. Pokaż, że ogólne rozwiązanie równania

$$xu_x + yu_y = 2xy$$

musi spełniać

$$\Phi(y/x, xy - u) = 0\,,$$

gdzie Φ jest dowolną funkcją lub alternatywnie

$$u(x, y) = xy + \phi(y/x)\,,$$

gdzie ϕ jest dowolną funkcją.

15. Pokaż, że ogólne rozwiązanie równania

$$xu_x + u_y = 0$$

musi spełniać

$$\Psi(x - ut, u) = 0\,,$$

gdzie Ψ jest dowolną funkcją.

16. Znajdź rozwiązania (ogólne lub konkretne)

$$
\begin{aligned}
&(x+2y)u_x - yu_y = 0\,,\\
&e^x u_x + y^2 u_y = ye^x\,,\\
&u_x + (2e^x - y)u_y = 0, \quad u(0,y) = y\,,\\
&u_x + u_y + 2u_z = 0, \quad u(1,y,z) = yz\,,\\
&xu_x + yu_y + xyu_z = 0, \quad u(x,y,0) = x^2 + y^2\,,\\
&xu_x yu_y = 2xy, \quad u(x,x) = x^2\,.
\end{aligned}
$$