zad. 1.

Niech $\mathcal{P}_D$ - rodzina podziałów odcinka $[a,b]$ taka, że

$\forall_{\delta>0}\ \exists\, P_\delta \in \mathcal{P}_D$ t. że P_δ jest podziałem $[a,b]$ i $\max_i |x_i - x_{i-1}| \le \delta$

Niech $\mathcal{P}$ - rodzina wszystkich podziałów $[a,b]$

Mamy:

$$\mathcal{P}_D \subset \mathcal{P}$$

$$\Downarrow$$

$$\liminf_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)(x_i-x_{i-1}) \le \liminf_{P\in\mathcal{P}_D} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)(x_i-x_{i-1}) \le$$

$$\le \liminf_{\substack{P\in\mathcal{P}_D\\ \delta\to 0}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)(x_i-x_{i-1})}_{B_P}$$

oraz:

$$\limsup_{P\in\mathcal{P}} \overbrace{\sum_{i=1}^{n} \Big(\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)(x_i-x_{i-1})}^{A_P} \ge \limsup_{P\in\mathcal{P}_D} A_P \ge \limsup_{\substack{P\in\mathcal{P}_D\\ \delta\to 0}} A_P$$

Zatem:

$$0 \le \overbrace{\liminf_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)(x_i-x_{i-1}) - \limsup_{P\in\mathcal{P}} \sum_{i=1}^{n} \Big(\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\Big)(x_i-x_{i-1})}^{X} \le$$

$$\le \liminf_{\substack{P\in\mathcal{P}_D\\ \delta\to 0}} B_P - \limsup_{\substack{P\in\mathcal{P}_D\\ \delta\to 0}} A_P \le \limsup_{\delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(P)(x_i-x_{i-1}) = 0$$

Zatem $X = 0 \implies f$ jest R-całkowalna.

Zad. 2.
Pokażę, że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}$ taka, że $\forall_{h<\delta}$

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx < \varepsilon$$ co jest

równoważne tezie zadania.
f jest R-całkowalna.

$\Downarrow$

$\forall_{\eta>0}$ istnieje podział $[a,b]$ P_n: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$
taki, że:

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\eta \quad \text{gdzie} \quad M_i=\sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \quad m_i=\inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

Niech $M=\sup_{[a,b]}|f(x)|=\sup_{\mathbb{R}}|f(x)|$ oraz $\sup_i (x_i-x_{i-1})<\xi<\eta$

i weźmy $h<\frac{\xi}{M\cdot n}$

i rozdrobnijmy podział (x_i) na (y_j) dodając punkty: $a+h$, $b-h$,
oraz $\forall_{j\in\{1,\ldots,n-1\}}$ x_j-h, x_j+h. Mamy oszacowanie:

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=\int_a^{a+h}|f(x+h)-f(x)|dx+\int_{b-h}^{b}|f(x+h)-f(x)|dx+$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i+h}^{x_{i+1}-h}|f(x+h)-f(x)|dx+\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i-h}^{x_i+h}|f(x+h)-f(x)|dx\leq$$

$$\leq 2M\cdot h+2M\cdot h+\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})+(n-1)\cdot 2h\cdot 2M\leq$$

$$\leq 4M\underbrace{h}_{\wedge \frac{\eta}{M\cdot n}}n+\eta\leq 5\eta$$

Kładąc $\eta=\frac{1}{5}\varepsilon$ dla $\delta=\frac{\varepsilon}{M\cdot n}$
otrzymujemy tezę.

ad. 4.

Weźmy podział $[a,b]$ P: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ taki, że

$\forall_i \quad (x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}$

Załóżmy (bez straty ogólności), że f jest niemalejąca.

Mamy (wedle oznaczeń z wykładu)

$$G(P,f) - D(P,f) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - f(x_{i-1})\right) \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right)$$

z tego, że f niemalejąca

Wiemy, że f ograniczona, zatem $\forall_{\varepsilon>0} \exists_n$ t. że

$$\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right) < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$\forall_{\varepsilon>0} \exists$ podział P_n $[a,b]$ t. że:

$$G(P,f) - D(P,f) < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

f jest R-całkowalna.

zad. 5.

Z kryterium Dirichleta wynika, że obie całki są zbieżne

$\Downarrow$

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \mathcal{J}_1 = \int_{2N\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx < \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \mathcal{J}_2 = \int_{2N\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx < \frac{\varepsilon}{2}$

Zatem
$$\left| \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x} dx - \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{(1+x)^2} dx \right| \leqslant \left| \int_0^{2N\pi} \frac{\cos x \cdot (1+x) - \sin x}{(1+x)^2} dx \right| + \varepsilon =$$

$$= \left| \frac{\sin x}{1+x} \right|_0^{2\pi N} + \varepsilon = \varepsilon$$

Z dowolności $\varepsilon>0$ mamy równość obu całek.

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{(1+x)^2} dx \leqslant \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = -\frac{1}{y}\Big|_1^{\infty} = 1$$

Zatem z kryterium porównawczego $\mathcal{J}_1$ jest bezwzględnie zbieżna.

$$\int_0^{\infty} \frac{|\cos x|}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos x|}{1+x} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\cos x|}{(n+1)\pi} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\cos x| \overset{\text{z uśrednienia } |\cos x|}{\geqslant} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{(n+1)\pi} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1} \text{ — szereg rozbieżny}$$

Zatem z kryterium porównawczego $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x}$ nie jest bezwzględnie zbieżna.

zad. 6.

Jeśli $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx = 0$ to nierówność jest oczywista. Niech teraz $\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx > 0$:

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx = \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1} \cdot |f(x)+g(x)|\, dx \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(x)|\, |f(x)+g(x)|^{p-1} dx + \int_a^b |g(x)|\, |f(x)+g(x)|^{p-1} dx \leq$$

nierówność Höldera $q=\frac{p}{p-1}$

$$\leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)\cdot q} dx\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \left(\int_a^b |g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\left(\int_a^b |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Po pomnożeniu obustronnie przez: $\dfrac{\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\right)}$

otrzymujemy tezę.

zad. 7.

$$\int_a^b x f(x) f'(x)\,dx = x f^2(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\big(f(x) + x f'(x)\big)\,dx =$$

$$= b \underset{\underset{0}{\parallel}}{f^2(b)} - a \underset{\underset{0}{\parallel}}{f^2(a)} - \underset{\underset{1}{\parallel}}{\int_a^b f^2(x)\,dx} - \int_a^b x f(x) f'(x)\,dx$$

$$\Downarrow$$

$$2\int_a^b x f(x) f'(x)\,dx = -1$$

$$\int_a^b x f(x) f'(x)\,dx = -\frac{1}{2}$$

$\blacksquare$

zad. 8.

$$s\int_1^{\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx = \lim_{N\to\infty} s\cdot\int_1^{N}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}\int_n^{n+1}\frac{n}{x^{s+1}}dx =$$

$$= \lim_{N\to\infty} s\sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{-n}{s\cdot x^s}\right]_n^{n+1} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}\left(\frac{n}{n^s}-\frac{n}{(n+1)^s}\right) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^s} - \underbrace{\left(\frac{N-1}{N^s}\right)}_{\substack{\downarrow N\to\infty \\ s>1 \\ 0}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

$$\frac{s}{s-1} - s\int_1^{\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}} = \frac{s}{s-1} - s\lim_{N\to\infty}\left(\int_1^N\frac{dx}{x^s}\right) + s\int_1^{\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx =$$

$$= \frac{s}{s-1} - s\lim_{N\to\infty}\left(\frac{-1}{s-1}\cdot\frac{1}{x^{s-1}}\Big|_1^N\right) + s\int_1^{\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx =$$

$$= \frac{s}{s-1} - s\lim_{N\to\infty}\frac{-1}{s-1}\left(\frac{1}{N^{s-1}}-1\right) + s\int_1^{\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx =$$

$$= \underbrace{\frac{s}{s-1} - \frac{s}{s-1}}_{=0} + s\int_1^{\infty}\frac{\lfloor x\rfloor}{x^{s+1}}dx \underset{\text{z części 1)}}{=} \eta(s)$$