zad. 1.

Niech $z = x - \lfloor x \rfloor \Rightarrow z \in [0,1)$

Podstawiając do szeregu mamy:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n \frac{\ln n}{(n^4)^{\frac{1}{3}}} z^n$$

Promień zbieżności R tego szeregu z tw. Cauchiego Hadamarda wynosi:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{gdzie } a_n = \left(3 + (-1)^n\right)^n \frac{\ln n}{(n^4)^{\frac{1}{3}}}.$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 4\left(\frac{\ln n}{(n^4)^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{n}} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{(\ln n)^{\frac{1}{n}}}^{\nearrow 1}}{\underbrace{\left(n^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{n}}}_{\searrow 1}} = 4$$

Zatem $R = \frac{1}{4}$

Czyli mamy zbieżność punktową ~~jest~~ dla $z \in [0, \frac{1}{4})$

Niech $z = \frac{1}{4}$

Wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n \frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{1}{4}\right)^n$

i $\left(3 + (-\frac{1}{n})^n\right)^n \frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}} \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$, a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$ zbieżny

Czyli z kryterium porównawczego ~~również~~ mamy zbieżności dla $z = \frac{1}{4}$

Czyli z tw. Abela szereg jest zbieżny jednostajnie na $z \in [0, \frac{1}{n}] \Rightarrow x \in [k, k+\frac{1}{4}]$ $k \in \mathbb{Z}$

Zad. 2.

Niech $z = \left|\frac{x-1}{x+1}\right| \Rightarrow z \geq 0$

Podstawiając:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (2n-1)!!}{n!\, e^n (2n)!!} z^n$$

Z tw. Cauchiego-Hadamarda promień zbieżności R wynosi:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \text{dla} \quad a_n = \frac{n^n (2n-1)!!}{n!\, e^n (2n)!!}$$

Mamy:

$$\limsup_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln n + \ln(2n-1)!! - \ln n! - n - \ln(2n)!!}{n}$$

z tw. Stoltza

$$\overset{\text{z tw. Stoltza}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln n + \ln(2n+1)!! - \ln(2n-1)!! -}{(n+1)-n}$$

$$\frac{- \ln(n+1)! + \ln n! - (n+1) + n - \ln(2n+2)!! + \ln(2n)!!}{} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln\overset{\nearrow 1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \ln\overset{\nearrow 0}{\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)} - 1}{1} = 0$$

Z ciągłości $\exp(x)$:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^0 = 1 \quad \Rightarrow \quad R = 1$$

Zad. 2. - ciąg dalszy:

Dla $x=1$ szereg nie jest zbieżny, gdyż:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (2n-1)!!}{n!\, e^n (2n)!!} \text{ - zbieżny}$$

$$\Updownarrow \quad - \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\sqrt{2\pi n}}}_{a_n} \text{ - zbieżny}$$

Niech $b_n = \frac{1}{n}$. Oczywiście $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - rozbieżny

Oraz: $\forall_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{b_{n+1}}{b_n} \quad \text{bo:}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)\cancel{\sqrt{n}}}{(2n+2)\cancel{\sqrt{n+1}}} \geqslant \frac{\sqrt{n}\cancel{\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}\cancel{\sqrt{n+1}}}$$

$$\Updownarrow$$

$$(2n+1)^2(n+1) \geqslant (2n+2)^2 n \quad -$$

$$\Updownarrow$$

$$4n^3 + 4n^2 + 4n^2 + 4n + n + 1 \geqslant 4n^3 + 8n^2 + 4n \quad \text{co zachodzi}$$

To dowodzi rozbieżności szeregu dla $x=1$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1 \Rightarrow \left|1 - \frac{2}{x+1}\right| < 1 \Rightarrow \begin{matrix} \frac{2}{x+1} > 0 \\ \frac{2}{x+1} < 2 \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{x > 0}} \Leftarrow$$

ad. 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}\ln n}\right)+\frac{\pi}{2}}{n^{\frac{2}{3}}\cdot \ln n}}_{a_n(x)} = f(x)$$

$$\left|(a_n(x))'\right| = \left|\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}\ln n}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-n)^2}{n\ln^2 n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\ln^2 n\cdot n^{\frac{7}{6}}+(x-n)^2\cdot n^{\frac{1}{6}}}\right| \leq \left|\frac{1}{\ln^2 n\cdot n^{\frac{7}{6}}}\right|$$

$$\Downarrow$$

Z kryterium Weierstrassa szereg pochodnych jest zbieżny jednostajnie.

$\forall_{x\in R}$ $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} =$

Niech $x=0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{-n}{\sqrt{n}\ln n}\right)+\frac{\pi}{2}}{n^{\frac{2}{3}}\cdot\ln n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{-n}{\sqrt{n}\ln n}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{n}{\sqrt{n}\ln n}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{n}\right)}{n^{\frac{2}{3}}\cdot\ln n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{n}\ln n}{n}\right)}{n^{\frac{2}{3}}\cdot\ln n} \text{ — zbieżny}$$

$\Uparrow$ z kryterium porównawczego

Mamy: $\operatorname{arctg}(y)\leq y \quad \forall_{y\geq 0}$

$$\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)}{n^{\frac{2}{3}}\cdot\ln n} \leq \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} \quad \text{oraz } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} \text{ – zbieżny}$$

Z jednostajnej zbieżności szeregu pochodnych oraz ze zbieżności szeregu dla $x=0$ wynika, że $f(x)$ jest dobrze określona, ciągła i różniczkowalna. ■

zad. 4.

a) Niech $a_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)$ $\cancel{\frac{}{n}}$ $\quad b_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$

Mamy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)\sin(nx)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$$

Wiemy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ ma ograniczone sumy częściowe dla $x \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon)$. Ponadto ciąg $\frac{1}{n} = g_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie do zera oraz jest malejący. Zatem z kryterium Dirichleta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin(nx)$ jest zbieżny jednostajnie na $(\varepsilon, \pi-\varepsilon)$. Ponadto $a_n(x)$ jest monotoniczny i jednostajnie ograniczony. Zatem z kryterium Abela $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)\, b_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$.

b) Niech $a_n(x) = x^n(1-x)$ $\quad b_n(x) = \cos nx$

$\forall_{k \in \mathbb{N}}$:

dla $x \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$\left| \sum_{n=1}^{k} \cos(nx) \right| = \left| \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x} \right| \leq \left| \frac{2}{2\sin\frac{1}{2}x} \right| = \frac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)}$$

Zatem ciąg sum częściowych $\sum_{n=1} b_n(x)$ jest jednostajnie ograniczony na $[\frac{1}{2}, 1]$.

Znajdę, dla jakiego x $a_n(x)$ przyjmuje maksimum na $[\frac{1}{2}, 1]$

$$a_n'(x) = 0 \Rightarrow n x^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x) = 0$$

$$x = \frac{n}{n+1}$$

Zatem

$\forall_{x \in [\frac{1}{2}, 1]}$

$$a_n(x) \leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Czyli $a_n(x) \rightrightarrows 0$ na $[\frac{1}{2}, 1]$

Oraz $\forall_{x \in [\frac{1}{2}, 1)}$ $a_n(x)$ malejący i $a_n(1) \equiv 0$ $\forall_{n \in \mathbb{N}}$

Zatem z kryterium Dirichleta szereg

$\sum a_n(x) b_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie na $[\frac{1}{2}, 1]$ $\blacksquare$