zad. 1.

Dla $x=0$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n(x)=0$

$$\forall_{x\in(0,1]} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^3x}{(e^{x^2})^n} = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{gdyż } e^{x^2}>1.$$

Zatem ciąg $f_n(x)$ zbiega punktowo do $f(x)\equiv 0$. $x\in[0,1]$

Ciąg $f_n(x)$ nie jest jednak zbieżny jednostajnie na $[0,1]$ gdyż $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ $f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n^3}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{e} \xrightarrow{n\to\infty} \infty \neq 0$

Nie ma też zbieżności niemal jednostajnej, gdyż $[0,1]$ jest zwartym podzbiorem $[0,1]$.

zad. 2.

$$f_n(x) = n^2 \, \frac{1-\cos\frac{x}{n}}{x}$$

$\forall x\in(0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{1-\cos\frac{x}{n}}{x} \overset{t=\frac{1}{n}}{=} \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos xt}{t^2 x} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{H}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot x \underbrace{\frac{\sin tx}{\cancel{2}tx}}_{\to 1,\ t\to 0,\ x>0} =$$

$$= \frac{1}{2}x = f(x)$$

Zatem

$\forall x\in(0,\infty)$ $\quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \frac{1}{2}x$

f_n nie jest jednak zbieżny jednostajnie gdyż:

$\forall n\in N$ $\quad f_n\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) = \frac{2}{\pi} n$.

$$\wedge \left|f_n\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\right)\right| = \left|\frac{2}{\pi} - \frac{\pi}{4}\right|\cdot n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

f_n jest zbieżny niemal jednostajnie gdyż:

$\forall_{x\in[a,b]\subset(0,\infty)}$ $\forall \varepsilon>0$

$\exists N_0$ takie, że $\forall n>N_0$ $\quad n > \frac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4!}\cdot\sqrt{\varepsilon}}$

$$\cancel{\left|1-\frac{\sin\frac{x}{N}}{\frac{x}{N}}\right| \le \left|1-\frac{\sin\frac{b}{N}}{\frac{b}{N}}\right| < \frac{\varepsilon}{b}}$$

Z mamy:

Reszta w postaci Lagrange'a cos.

$z\in[0,\frac{x}{n}]$

$$* = |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{n^2}{x}\cdot\left(1-\left(1-\left(\frac{x}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\frac{\cos(z)}{4!}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^4\right)\right)-\frac{x}{2}\right|$$

zad. 2. ciąg dalszy.

$$* = \left| \frac{n^2}{x} \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{x^2}{n^2} - \frac{\cos(z)}{4!} \left(\frac{x}{n} \right)^4 \right) - \frac{x}{2} \right| =$$

$$= \left| \frac{\cos(z)}{4!} \cdot \frac{x^3}{n^2} \right| \leq \left| \frac{1 \cdot b^3}{4! \cdot \left(\frac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4!}\sqrt{\varepsilon}} \right)^2} \right| = \varepsilon$$

co z dowolności $\varepsilon > 0$ i $x \in [a, b]$ daje niemal jednostajną zbieżność fn.

zad. 3.

Niech:

$$f(x) = \ln(1 + \sin x)$$

Mamy:

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$f''(x) = \frac{-\sin x(1 + \sin x) - \cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} = \frac{-1}{1 + \sin x}$$

$$f'''(x) = \frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$$

Czyli: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$

Rozwinięcie f w szereg Taylora z resztą w postaci Lagrangea ma postać:

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{\cos(z)}{(1+\sin(z))^2} \cdot \frac{x^3}{6} \quad \text{gdzie} \quad z \in (0, x) \subset [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\forall_{z \in [0, \frac{\pi}{2}]} \; 0 \leqslant \frac{\cos(z)}{(1+\sin(z))^2} \leqslant 1$$

Zatem: $\forall_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]}$

$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant f(x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

co należało udowodnić.

zad. 4.

(P_n) - ciąg wielomianów zbieżny jednostajnie do funkcji f na $\mathbb{R}$.

$$\Downarrow$$

Ciąg (P_n) spełnia jednostajny warunek Cauchiego:

$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{N_0} \forall_{m,k>N_0} \forall_{x\in\mathbb{R}}$

$$|P_m(x) - P_k(x)| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$\forall_{x\in\mathbb{R}}$ $$-\varepsilon < W_{k,m}(x) = P_m(x) - P_k(x) < \varepsilon$$

Zatem $W_{k,m}(x)$ jest wielomianem zerowego stopnia, co oznacza (z dowolności ε), że ~~dla~~ $\exists_{i_0}$ t. że $\forall_{j,i>i_0}$ wielomiany P_i, P_j są wielomianami tego samego stopnia o tych samych współczynnikach (mniejszego od i_0) różniącymi się co najwyżej wyrazem wolnym. Niech $a_{0,i}$ będzie wyrazem wolnym wielomianu P_i. Wiemy, że:

$$\lim_{i\to\infty} a_{0,i} = \lim_{i\to\infty} P_i(0) = f(0) =: a_0$$

Zatem ta granica istnieje.

~~Niech~~ Czyli $\forall_{i>i_0}$ $P_i(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_{0,i}$

gdzie $a_m, \ldots, a_1$ i m nie zależą od i.

Czyli $\lim_{i\to\infty} P_i(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = f(x)$

co wynika z jednoznaczności granicy