zad. 1.

Przybliżenie e^3 można obliczyć stosując rozwinięcie funkcji e^x w $x_0 = 0$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \underbrace{\frac{e^{\xi}}{(k+1)!} \cdot x^{k+1}}_{= R_k}$$

gdzie $\xi \in [0, x]$ (reszta Lagrangea)

Dla $x = 3$ i dokładności $\frac{1}{1000}$ wystarczy:

$$R_k \leq \frac{e^3}{(k+1)!} \cdot 3^{k+1} < \frac{27 \cdot 3^{k+1}}{(k+1)!} < \frac{1}{1000}$$

Dla $k = 15$ zachodzi:

$$\frac{27 \cdot 3^{15}}{15!} < \frac{1}{1000}$$

Zatem szukaną liczbą wymierną może być np.:

$$q = \sum_{k=0}^{14} \frac{3^k}{k!}$$

zad. 2.

Stosując rozwinięcie funkcji arcsin x, sin, e^x oraz ~~cosx~~, ~~lnx~~

otrzymujemy:

$$\begin{cases} \arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\arcsin x - \sin x = \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$e^{(x - \sin x)} = e^{\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)} = 1 + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + o(x^6) = 1 + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^{(x - \sin x)} - 1 = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = 0$ dla $x = 0$

$\left(\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right)' = \operatorname{tg} x = 0$ dla $x = 0$

$\left(\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right)'' = (\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1$ dla $x = 0$

Zatem $$\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Z tych rozwinięć wynika:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\arcsin x - \sin x)^{\frac{4}{3}} \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\left(e^{(x - \sin x)} - 1\right)^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x^4}{3^{\frac{4}{3}}} + o(x^4)\right)\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\frac{x^6}{36} + o(x^6)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^6}{6 \cdot \sqrt[3]{3}} + o(x^6)}{\frac{x^6}{36} + o(x^6)} = 2 \cdot 3^{\frac{2}{3}}$$

zad. 3.

$$f(x) = \frac{1+x^2+x^4}{(1+2x)^2(1-3x)^2(1-5x)} = \underline{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3} + o(x^3)$$

trzeci wielomian Maclaurina

$$\Downarrow$$

$$\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)\right)\left((1+2x)^2(1-3x)^2(1-5x)\right) = 1 + x^2 + x^4$$

$$\Downarrow$$

$$\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - 7x - x^2 + 67x^3 - 24x^4 - 180x^5\right) = 1 + x^2 + x^4$$

$\Downarrow$ porównując współczynniki

$$\begin{cases} a_0 \cdot 1 = 1 \\ a_1 - 7a_0 = 0 \\ a_2 - 7a_1 - a_0 = 1 \\ a_3 - 7a_2 - a_1 + 67a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 7 \\ a_2 &= 51 \\ a_3 &= 297 \end{aligned}$$

Zatem trzeci wielomian Maclaurina funkcji f ma postać:

$$\underline{W_{3f} = 1 + 7x + 51x^2 + 297x^3}$$

zad. 4.

$$f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$$

W celu sprawdzenia, że f jest rosnąca na $(0,+\infty)$ wyznaczono pochodną:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x - \frac{1}{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-2x^{-3}\right)\right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

Zatem $f'(x) > 0 \quad \forall_{x\in(0,+\infty)}$, czyli funkcja jest na tym przedziale rosnąca.

W celu sprawdzenia wklęstości wyznaczono $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} - \sqrt{1+x^2}}{x^2} = \frac{-1}{x^2\cdot\sqrt{1+x^2}} < 0 \text{ dla } x\in(0,+\infty)$$

Zatem f jest wypukła na $(0,+\infty)$.