zad. 1.

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{\exp(5x+7)}{\arcsin(5x^2)}\right)} \cdot \operatorname{arctg}'\left(\frac{\exp(5x+7)}{\arcsin(5x^2)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{arctg}\left(\frac{\exp(5x+7)}{\arcsin(5x^2)}\right)} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{\exp(5x+7)}{\arcsin(5x^2)}\right)^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\exp(5x+7)\cdot 5 \cdot \arcsin(5x^2) - e^{5x+7} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-25x^4}} \cdot 10x}{\arcsin^2(5x^2)} =$$

$$= \frac{5\exp(5x+7)\left(\arcsin(5x^2) - \frac{1}{\sqrt{1-25x^4}}\cdot 2x\right)}{\operatorname{arctg}\left(\frac{\exp(5x+7)}{\arcsin(5x^2)}\right)\cdot\left(\arcsin^2(5x^2) + \exp(10x+14)\right)}$$

zad. 2.

Styczna do wykresu f w punkcie $(0, f(0))$ to prosta o współczynniku kierunkowym $f'(0)$ przechodząca przez punkt $(0, f(0))$.

Zatem jej równanie ma postać:

$$y(x) = f'(0) \cdot x + f(0)$$

$$f'(x) = \frac{\left(\ln 3 \cdot 3^x \cdot \cos x - 3^x \cdot \sin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)(1+x^2+2x^4+x^8)}{(1+x^2+2x^4+x^8)^2} -$$

$$- \frac{(2x+8x^3+8x^7)(3^x \cos x + \arcsin(x))}{(1+x^2+2x^4+x^8)^2}$$

$\swarrow$

$$f'(0) = \ln 3 + 1$$

$$f(0) = 1$$

Czyli równanie stycznej ma postać:

$$y(x) = (\ln 3 + 1)x + 1$$

zad. 3.

Policzmy pochodną f:

$$f'(x) = 7(x+3)^6 \cdot \sqrt[6]{(x-12)^2} + (x+3)^7 \cdot \frac{1}{6}\left((x-12)^2\right)^{-\frac{5}{6}} \cdot 2 \cdot (x-12) =$$

$$= \frac{(x+3)^6\left(21(x-12)^2 + (x+3)(x-12)\right)}{3\left((x-12)^2\right)^{\frac{5}{6}}} = \qquad x \neq 12$$

$$= \frac{(x+3)^6\left(22x^2 - 513x + 2983\right)}{3\left((x-12)^2\right)^{\frac{5}{6}}}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = -3 \lor x = \frac{249}{22}$$

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -3) \\ & x \in \left(-3, \frac{249}{22}\right) \\ f'(-3) = 0 & x = -3 \end{cases}$$

$$f'(x) > 0 \qquad x \in (12, +\infty)$$

Zatem f jest rosnąca na $x \in \left(-\infty, \frac{249}{22}\right)$.

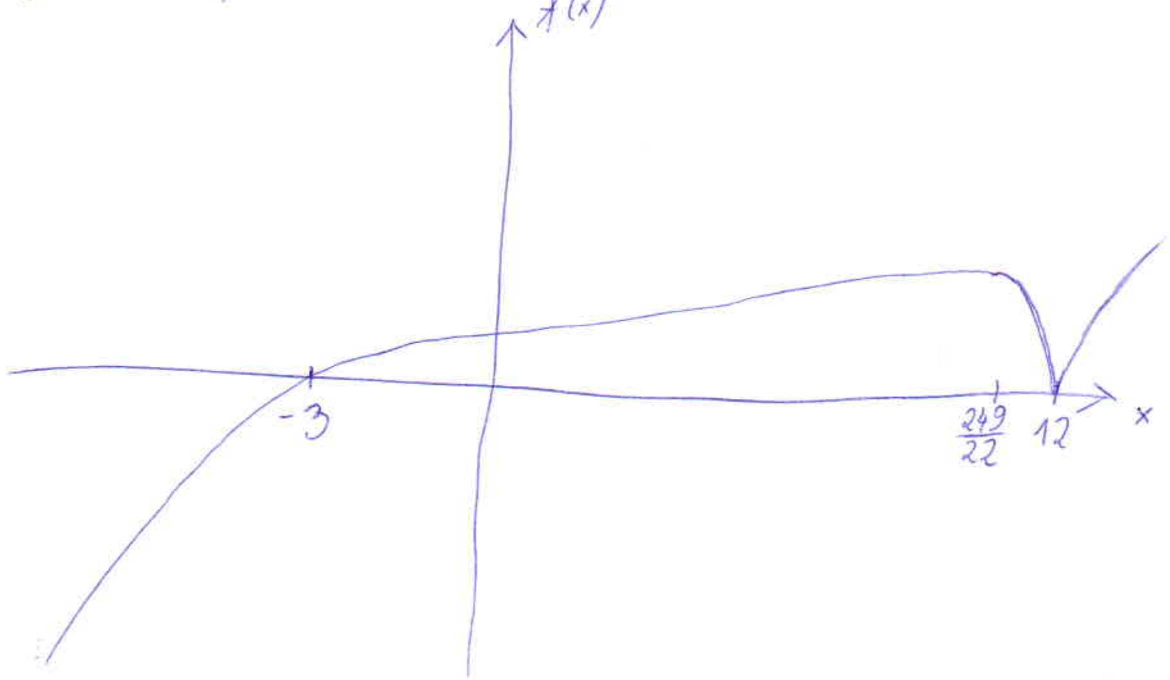
$$f'(x) < 0 \qquad x \in \left(\frac{249}{22}, 12\right)$$

Zatem f malejąca na $\left(\frac{249}{22}, 12\right)$

W $x_0 = \frac{249}{22}$ f ma maksimum lokalne, a w $x_0 = 12$ f ma minimum lokalne gdyż:

$$f(12) = 0 \quad \land \quad \forall x \in (11, 13) \setminus \{12\}\ f(x) > 0.$$

Wykres funkcji f ma postać:



zad. 4.

$$f(x) = \frac{e^x}{x+17} \qquad x \neq -17$$

W celu określenia monotoniczności oraz ekstremów lokalnych f policzmy jej pochodną:

$$f'(x) = \frac{e^x(x+16)}{(x+17)^2} \qquad x \neq -17$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -17} f'(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -17^+} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -17^-} f(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow$$

Zatem, w ~~okolicach~~ otoczeniu punktu $x = -17$ funkcja zbiega od lewej strony do $-\infty$, a od prawej do $+\infty$ wzdłuż pionowej asymptoty

$$\begin{cases} f'(x) = 0 \iff x = -16 \\ f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, -16) \setminus \{-17\} \\ f'(x) > 0 \iff x \in (16, +\infty) \\ f(x) < 0 \text{ dla } x \in (-\infty, -17) \\ f(x) > 0 \text{ dla } x \in (-17, +\infty) \end{cases}$$

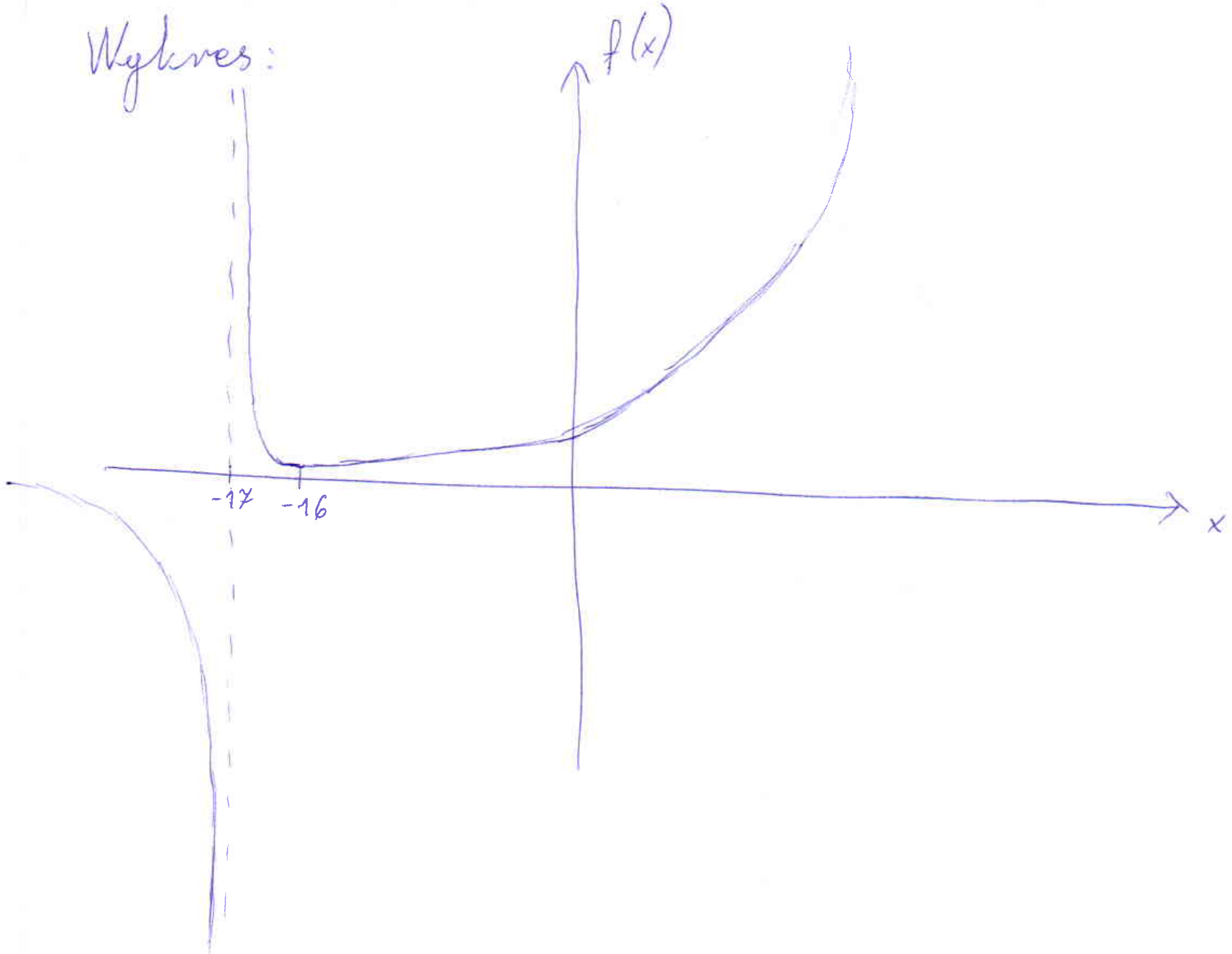
$$\Downarrow$$

f jest malejąca dla $x \in (-\infty, -17)$ oraz dla $x \in (-17, -16)$

f jest rosnąca dla $x \in (-16, +\infty)$

f ma minimum lokalne w punkcie $x = -16$

Wykres:



zad. 5.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\left(f(2x)-f(x)\right)}{x^2+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(2x)-f(x)}{\frac{x^2+7}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)}$$

gdzie $g(x) = f(2x) - f(x)$ – różniczkowalna

$h(x) = \frac{x^2+7}{x}$ – – // –

oraz $\lim\limits_{x\to\infty} |h(x)| = +\infty$ $\qquad h'(x) = \frac{2x\cdot x - (x^2+7)}{x^2} = \frac{x^2-7}{x^2}$

Zatem mogę skorzystać z reguły de l'Hôpitala:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2}\, f'(2x) - f'(x)}{\underbrace{\left(\frac{x^2-7}{x^2}\right)}_{\to 1}} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty \\ y=2x}} \frac{2\cdot \overset{\nearrow g}{f'(y)} - \overset{\nearrow g}{f'(x)}}{\underbrace{\left(\frac{x^2-7}{x^2}\right)}_{\to 1}} = g \qquad \text{cbdu.}$$