Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Całka oznaczona (Riemanna, Newtona)

1. Wyznaczyć wprost z definicji całkę Riemanna
$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2}\,.$$
Wskazówka. Właściwie dobrać punkt pośredni.

2. Udowodnić, że funkcja
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{w p.p.} \end{cases}$$
nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

3. Przypomnienie: Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcję ciągłą, a $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie jej funkcją pierwotną[1]. *Całkę Newtona* z funkcji f na przedziale $[a, b]$ definiujemy jako
$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)\,.$$
Obliczyć całki Newtona

$a.\ \int_0^1 x\ dx\,,$	$b.\ \int_0^{pi} \sin(x)\ dx\,,$
$c.\ \int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(lx)\ dx\,,$	$d.\ \int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(lx)\ dx\,,$
$e.\ \int_1^e \ln x\ dx\,,$	$f.\ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x\ dx}{\sqrt{1-x^4}}\,,$
$g.\ \int_0^1 \frac{x+4}{(x^4+2x+1)(x^2+1)}\ dx\,,$	$h.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\ dx\,,$
$i.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\ dx\,,$	$j.\ \int_{-1}^{\sqrt{2}} \frac{x\ dx}{1+x^4}\,,$
$k.\ \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\sin(x^2)\ dx\,,$	$l.\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^4 x\ dx\,,$
$m.\ \int_0^2 \lvert 1-x\rvert\ dx\,,$	$n.\ \int_{\frac{1}{2}}^e \lvert\ln x\rvert\ dx\,.$

4. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego ciągu punktów
$$a \leqslant x_0 < t_1 < x_1 < t_2 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < t_n < x_n \leqslant b$$

[1] Każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną - to już wiemy.

spełniających

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \quad |x_i - x_{i-1}| \leqslant \delta$$

mamy

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx - \sum_{k=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon\,.$$

Wywnioskować, że całka Newtona pokrywa się z całką Riemanna dla funkcji ciągłych.

Wskazówka. Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej.

5. Obliczyć granice

$$a.\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \ln\left(\frac{k^2}{n^2}\right)\,,$$

$$b.\ \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \ln(k^2) - \frac{1}{2}(n+1)\ln(n^2) \right)\,,$$

$$c.\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k^2 + 5kn + 7n^2}}\,.$$

6. Rozwiązać równanie

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = \frac{\pi}{6}\,.$$

7. Podać przykład funkcji całkowalnej w sensie Riemanna ale nie posiadającej funkcji pierwotnej.

8. Niech $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i taka, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Obliczyć

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\ dt\,.$$

9. **(*)** Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie całkowalna w sensie Riemanna, nieujemna ($f \geqslant 0$) i taka, że $\int_a^b f(x)\ dx = 0$. Udowodnić, że wówczas $f(x) = 0$ dla *prawie wszystkich* $x \in [a, b]$, tzn. zbiór $A = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\} = f^{-1}(0, \infty)$ jest *miary zero*, czyli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją przedziały $I_1, I_2, \ldots$, pokrywające A (tj. $A \subseteq \bigcup_k I_k$), których sumaryczna długość $\sum_k |I_k|$ nie przekracza ε.

10. Znaleźć ekstrema funkcji

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t + 1}{t^2 - 2t + 2}\ dt\,.$$

11. Udowodnić nierówność

$$\frac{\pi}{6} \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} \leqslant \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\,.$$

12. Pokazać, że jeśli $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\ dx \quad \text{oraz} \quad \int_0^{\pi} x f(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)\ dx\,.$$

13. Pokazać, że jeśli $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to

- jeśli f jest parzysta, to $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$,
- jeśli f jest nieparzysta, to $\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$.

14. Obliczyć całki

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x}{\cos^2 x}\ dx \quad \text{oraz} \quad \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} x^{10} \sin^9 x\ dx\,.$$

15. Udowodnić nierówność Schwartza

$$\left| \int_a^b f(x) g(x)\ dx \right| \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\ dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2\ dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

16. Pokazać, że

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx\,.$$

17. Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna i ograniczona. Pokazać, że funkcja

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt : [a, b] \to \mathbb{R}$$

jest jednostajnie ciągła.

18. Definiujemy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(t) = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{\sin(tx)}{x}\ dx\,.$$

- Pokazać, że f jest dobrze określona, tj. powyższa granica istnieje i jest skończona dla każdego $t \in \mathbb{R}$.
- Znaleźć jawny (bez użycia całki) wzór opisujący $f(t)$.