Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Szeregi funkcyjne

1. [Drugie twierdzenie Diniego] Każda z funkcji $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna. Ponadto wiadomo, że $f_n \to f$ punktowo, gdzie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją ciągłą. Udowodnić, że $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

   Wskazówka: Twierdzenie Cantora o funkcjach ciągłych na zbiorach zwartych.

   Wskazówka: Wiedząc, że f_n ma granicę w x i w y ($x < y$) możemy dostać oszacowanie na $f_n(z)$ dla $z \in (x,y)$ korzystając z monotoniczności.

2. Udowodnić, że jeśli $f_n \rightrightarrows f : A \to B$, a $g : \mathbb{R} \to A$ jest dowolną funkcją, to ciąg złożeń $f_n \circ g : \mathbb{R} \to B$ zbiega jednostajnie do funkcji $f \circ g$.

3. Niech $f_n, f : A \to B$ będą jak w poprzednim zadaniu. Znaleźć przykład funkcji $g : B \to \mathbb{R}$ takiej, że $g \circ f_n$ *nie zbiega* jednostajnie do $g \circ f$. Jakie (naturalne) warunki musi spełniać g, by ciąg złożeń $g \circ f_n$ był zbieżny jednostajnie?

4. Dany jest ciąg funkcyjny $a_n : A \to \mathbb{R}$. Udowodnić następujące jednostajne kryteria zbieżności szeregów funkcyjnych:

   (a) [Cauchy] Jeśli $\sqrt[n]{|a_n|} \rightrightarrows g$ na $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz $\sup_{x \in A} |g(x)| < 1$, to szereg $\sum a_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na A.

   (b) [d'Alembert] Jeśli $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightrightarrows g$ na $A \subseteq \mathbb{R}$ oraz $\sup_{x \in A} |g(x)| < 1$, to szereg $\sum a_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie na A.

5. Dane są ciągi funkcyjne $a_n, b_n : A \to \mathbb{R}$. Udowodnić następujące jednostajne kryteria zbieżności szeregów funkcyjnych:

   (a) [Dirichlet] Jeśli dla każdego $x \in A$ ciąg liczbowy $a_n(x)$ jest monotoniczny, a ponadto $a_n \rightrightarrows 0$ oraz ciąg sum częściowych $\sum b_n$ jest jednostajnie ograniczony na A, to szereg $\sum a_n b_n$ jest zbieżny jednostajnie na A.

   (b) [Abel] Jeśli dla każdego $x \in A$ ciąg liczbowy $a_n(x)$ jest monotoniczny, a ponadto ciąg a_n jest jednostajnie ograniczony na A oraz szereg $\sum b_n$ jednostajnie zbieżny, to szereg $\sum a_n b_n$ także jest zbieżny jednostajnie.

   Wskazówka: Przypomnieć sobie dowody tych kryteriów dla zwykłych szeregów (przekształcenie Abela).

6. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności szeregów

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^n, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n,$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\operatorname{tg} x)^n, \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \tfrac{1}{x}\right)^{n^2}.$$

7. Zbadać zbieżność jednostajną szeregów

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^{n-1}$ na $[-1,1]$,

$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$ na ?,

$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n x}\right)$ na $(0,\infty)$,

$d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ na $(-e,e)$,

$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^2e^{-n^2|x|}$ na $\mathbb{R}$,

$f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt[n]{n!}}(x^n+x^{-n})$ dla $\frac{1}{2}<|x|<2$,

$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ na $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$,

$h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ na $[1,\infty)$,

$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+x^2}\operatorname{arctg}(nx)$ na $\mathbb{R}$,

$j)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$ na $(0,\infty)$.

8. Wykazać, że funkcje

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^3}{x^5+n^5} \quad \text{oraz} \quad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\exp(-n^2x)$$

są dobrze określone i klasy $C^1((0,\infty))$.

9. Definiujemy funkcje $\tilde{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ oraz $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ wzorami

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} 2x & \text{dla } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right] \\ 2-2x & \text{dla } x\in\left(\frac{1}{2},1\right]\end{cases} \quad \text{oraz} \quad f_0(x)=\tilde{f}(x-[x]).$$

Ustalmy liczbę $\alpha\in(0,\infty)$. Dla $k=1,2,\ldots$ kładziemy

$$f_k(x)=\frac{f_0(2^kx)}{2^{\alpha k}} \quad \text{oraz} \quad f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(x).$$

(a) Udowodnić, że funkcja f jest dobrze zdefiniowana i ciągła na $\mathbb{R}$.

(b) Pokazać, że jeśli $\alpha>1$, to funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie dwójkowo niewymiernym.