Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

0.1 Szeregi potęgowe

Szereg Taylora i Maclaurina; porównywanie szeregów wyraz po wyrazie; obliczanie iloczynu szeregów oraz szeregu dla funkcji odwrotnej.

1. Rozwinąć w szereg potęgowy wokół punktu $x_0 = 0$ funkcję

$$f(x) = \frac{1}{Ax^2 + Bx + 1}\,.$$

   Zastosować znaleziony szereg do wyznaczenia zwartego wzoru na n-ty wyraz *ciągu Fibonacciego* zdefiniowanego rekurencyjnie: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ oraz $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

   Wskazówka: Założyć, że $f(x) = \sum a_n x^n$ i znaleźć wzór rekurencyjny na a_n. Obliczyć pierwiastki równania $Ax^2 + Bx + 1 = 0$ (być może zespolone) i rozłożyć $f(x)$ na sumę ułamków prostych, co pozwoli wyznaczyć jawny wzór na a_n.

0.2 Jednostajna ciągłość funkcji

Definicja i własności funkcji jednostajnie ciągłych; twierdzenie Cantora; istnienie granic na krańcach przedziałów ograniczonych; warunek Lipschitza i Höldera; warunek konieczny jednostajnej ciągłości: dla każdych dwóch ciągów (x_n) i (y_n) (niekoniecznie zbieżnych) takich, że $|x_n - y_n| \to 0$ musi być $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$.

1. Zbadać jednostajną ciągłość funkcji

$$\begin{aligned} f(x) &= x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad \text{na } (0,\infty)\,,\\ f(x) &= \exp\left(\tfrac{-1}{x}\right) \quad \text{na } (0,\infty)\,,\\ f(x) &= \sqrt[3]{(x-3)^2(x+1)} \quad \text{na } \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

   Wskazówka: Twierdzenie Cantora.

2. Udowodnić, że funkcja ograniczona, monotoniczna i ciągła na dowolnym przedziale (a, b) (tutaj $a, b \in [-\infty, \infty]$) jest jednostajnie ciągła.

3. Niech $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie jednostajnie ciągła. Udowodnić, że istnieje liczba $M > 0$ taka, że

$$\frac{|f(x)|}{x} \leqslant M \quad \text{dla } x \geqslant 1\,.$$

4. Niech $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie jednostajnie ciągła. Udowodnić, że istnieje liczba $M > 0$ taka, że

$$\sup_{u>0}\{|f(x+u) - f(u)|\} \leqslant M(x+1) \quad \text{dla } x \geqslant 0\,.$$

5. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie jednostajnie ciągła. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne
   (a) dla każdej funkcji jednostajnie ciągłej $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ iloczyn $fg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągły,
   (b) funkcja $h(x) = |x|f(x)$ jest jednostajnie ciągła.

0.3 Funkcje wypukłe

Definicja; nierówność Jensena; przyjmowanie wartości najmniejszej/największej przez funkcje wypukłe/wklęsłe; suma funkcji wypukłych/wklęsłych jest wypukła/wklęsła.

1. Udowodnić nierówność między ważoną średnią arytmetyczną i ważoną średnią geometryczną: dla każdego ciągu wag $a_1, \ldots, a_n$ takich, że $a_k \geqslant 0$ oraz $\sum a_k = 1$ i dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ mamy
$$\sum_{k=1}^{n} a_k |x_k| \geqslant \prod_{k=1}^{n} |x_k|^{a_k} .$$
Korzystając z powyższego, wyprowadzić *nierówność Younga*: dla $p, q \in [0, 1]$ takich, że $p + q = pq$ mamy
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \quad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} .$$

2. Udowodnić *nierówność Höldera*: dla $p, q \in [0, 1]$ takich, że $p + q = pq$ mamy
$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} .$$

3. Niech $x_1, \ldots, x_n \in (0, \pi)$ oraz $x = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$. Udowodnić nierówności
$$\prod_{k=1}^{n} \sin(x_k) \leqslant \sin^n(x) ,$$
$$\prod_{k=1}^{n} \frac{\sin(x_k)}{x_k} \leqslant \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^n .$$

4. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wypukła i ograniczona z góry. Udowodnić, że f jest funkcją stałą. Czy prawdą jest podobne twierdzenie dla funkcji określonej na (a, ∞)?

5. Niech $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ (tutaj $a, b \in [-\infty, \infty]$) wypukła i ograniczona. Pokazać, że f jest jednostajnie ciągła.

6. Wykazać, że ze zbieżności szeregu $\sum a_n^4$ (tutaj $a_n \in \mathbb{R}$ lub $a_n \in \mathbb{C}$ co nie czyni wielkiej różnicy) wynika zbieżność szeregu $\sum a_n n^{-\frac{4}{5}}$.

0.4 Pochodna funkcji i jej zastosowania

Definicja;twierdzenie Lagrange'a i Cauchy'ego o wartości średniej; wzór Taylora z resztą; znajdowanie ekstremów i kresów funkcji.

1. Stosując twierdzenie Cauchy'ego udowodnić nierówności

$$1-\frac{x^2}{2}<\cos x \quad \text{dla } x\neq 0\,,$$
$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x \quad \text{dla } x>0\,.$$

2. Udowodnić

$$2\operatorname{tg} x-\sinh x>0 \quad \text{dla } x\in\left(0,\tfrac{\pi}{2}\right)\,,$$
$$\frac{x\ln x}{x^2-1}<\frac{1}{2} \quad \text{dla } x>0, x\neq 1\,.$$

   Wskazówka: Użyć wzoru Taylora z resztą w postaci Lagrange'a.

3. Zbadać, która z liczb jest większa: e^{π} czy π^{e}? $\ln 8$ czy 2?
   Wskazówka: Czy $\ln x<\frac{x}{e}$?
   Wskazówka: Użyć wzoru Taylora z resztą w postaci Lagrange'a.

4. Znaleźć ekstrema funkcji

$$f(x)=x^m(1-x)^n \quad \text{gdzie } n,m\in N\,, x\in\mathbb{R}\,.$$

5. Znaleźć wartość największą i najmniejszą funkcji

$$f(x)=\sin^{2m}(x)\cos^{2n}(x) \quad \text{gdzie } n,m\in\mathbb{N}\,, x\in\mathbb{R}\,.$$

   Wskazówka: Funkcja f jest okresowa.

6. Znaleźć ekstrema funkcji

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}|1-x|^{\frac{2}{3}}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,.$$

   Uwaga: Funkcja f nie jest różniczkowalna na $\mathbb{R}$.