Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Szeregi potęgowe

1. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności szeregów potęgowych

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n\,,$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n\,, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} (2+(-1)^n)^n x^n\,,$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n x^n\,, \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}\,,$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^{n!}\,, \qquad h)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n\,,$$

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 3^{n^2} \cdot 4^{n^3}}{n+n^2+n^3} x^{2n^3}\,, \qquad j)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n 2)^{2n}}{n} x^{2n+\cos(n\pi)}\,,$$

$$k)\ \sum_{n=1}^{\infty} (5n+(-1)^n)^n x^{2n}\,, \qquad l)\ \sum_{n=1}^{\infty} 8^n \sqrt{n} x^{n+1}\,.$$

2. Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności szeregów

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{2^n n^3}\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^n\,,$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n4^n}{3^n} x^n (1-x)^n\,, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n\,,$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\operatorname{tg} x)^n\,, \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \tfrac{1}{x}\right)^{n^2}\,.$$

3. Obliczyć sumy

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\,, \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}\,,$$

$$c)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}\,, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\,,$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}\,, \qquad f)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}\,.$$

Wskazówka:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \quad \text{dla jakich } x?$$

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad \text{dla jakich } x?$$

4. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + n^5}$$

jest dobrze określona i klasy $C^1([0,\infty))$.

5. Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 x)$$

jest dobrze określona i klasy $C^1((0,\infty))$.