Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Zbieżność jednostajna ciągów funkcyjnych II

1. Udowodnić, że zbieżność jednostajna $f_n \rightrightarrows f$ na $A \subseteq \mathbb{R}$ jest równoważna *jednostajnemu warunkowi Cauchy'ego*, tzn.

$$f_n \rightrightarrows f \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m > N \; \forall x \in A \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon \; .$$

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna. Załóżmy ponadto, że f' jest funkcją jednostajnie ciągłą na $\mathbb{R}$. Definiujemy ciąg

$$f_n(x) = n\left(f(x + \tfrac{1}{n}) - f(x)\right) \; .$$

   Udowodnić, że $f_n \rightrightarrows f'$ na $\mathbb{R}$. Pokazać, że założenie o jednostajnej ciągłości f' jest istotne.

   Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

3. Każda z funkcji $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna. Ponadto wiadomo, że $f_n \to f$ punktowo, gdzie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest pewną funkcją ciągłą. Udowodnić, że $f_n \rightrightarrows f$ na $[a, b]$.

   Wskazówka: Twierdzenie Cantora o funkcjach ciągłych na zbiorach zwartych.

   Wskazówka: Wiedząc, że f_n ma granicę w x i w y ($x < y$) możemy dostać oszacowanie na $f_n(z)$ dla $z \in (x, y)$ korzystając z monotoniczności.

4. (*) Każda z funkcji $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna. Ponadto wszystkie funkcje f_n są wspólnie ograniczone, tj.

$$\exists M \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x)| \leqslant M \; .$$

   (a) Udowodnić, że istnieje podciąg f_{n_k} zbieżny punktowo do pewnej funkcji f.

   (b) Udowodnić, że jeśli f jest funkcją ciągłą, to $f_{n_k} \rightrightarrows f$.

   Wskazówka: Użyć metody przekątniowej do skonstruowania podciągu zbieżnego dla wszystkich $x \in \mathbb{Q}$ - daje to pewną $\tilde{f} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Rozszerzyć tę granicę $\tilde{f}$ do funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ korzystając z monotoniczności f_n. Udowodnić monotoniczność f. Skorzystać z faktu, że funkcje monotoniczne mogą być nieciągłe tylko w przeliczalnie wielu punktach.

5. Niech $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem wielomianów zbieżnym jednostajnie na $\mathbb{R}$ do pewnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnić, że f też jest wielomianem.

   Uwaga! Istotne jest, że zbieżność P_n jest na całym zbiorze $\mathbb{R}$, a nie tylko na ograniczonym podzbiorze.

6. Niech $C \subseteq [0, 1]$ będzie klasycznym zbiorem Cantora poznanym na wykładzie. Pokazać, że $x \in C$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg e_k liczb ze zbioru $\{0, 2\}$ taki, że

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{3^k} \; .$$

   Innymi słowy, elementy C to dokładnie te liczby z przedziału $[0, 1]$, które w zapisie trójkowym mają tylko cyfry 0 i 2.

7. Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją schodkową Cantora (nazywaną czasem *diabelskimi schodami*) poznaną na wykładzie. Pokazać, że

$$\forall x \in C \quad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k}{3^k} \Rightarrow f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k/2}{2^k} \; .$$

8. Jeśli $f, F : (a,b) \to \mathbb{R}$ oraz $f = F'$ to mówimy, że F jest funkcją pierwotną f. Wykazać, że każda funkcja ciągła na (a,b) ma funkcję pierwotną.

9. Mówimy, że rodzina funkcji $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *jednakowo ciągła* na zbiorze zwartym K jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x, y \in K \quad |x - y| \leqslant \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon \; .$$

Wykazać, że jeśli $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ są jednakowo ciągłe na $[a,b]$ i $f_n \to f$ punktowo, to $f_n \rightrightarrows f$.

Wskazówka: Pokazać najpierw, że f musi być jednostajnie ciągła. Potem skorzystać z istnienia granicy w $f_n(x_i)$, gdzie x_i są takie, że zbiory $(x_i - \delta, x_i + \delta)$ pokrywają $[a,b]$ dla pewnego δ. Następnie szacować z nierówności trójkąta.

10. Niech $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą ciągłe, różniczkowalne i takie, że pochodne $f_n' : (a,b) \to \mathbb{R}$ są wspólnie ograniczone, tj.

$$\exists M > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \forall x \in (a,b) \quad |f_n'(x)| \leqslant M \; .$$

Ponadto $f_n \to f$ punktowo. Udowodnić, że $f_n \rightrightarrows f$.

Wskazówka: Skorzystać z poprzedniego zadania.

11. Definiujemy

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{dla } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad : [0,1] \to \mathbb{R}$$

$$\text{oraz} \quad f_0(x) = \tilde{f}(x - [x]) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; .$$

Ustalmy liczbę $\alpha \in (0,1)$. Dla $k = 1, 2, \ldots$ kładziemy

$$f_k(x) = \frac{f_0(2^k x)}{2^{\alpha k}} \; .$$

(a) Niech $S_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x)$. Udowodnić, że S_N jest zbieżny jednostajnie na $\mathbb{R}$ do pewnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) $(*)$ Udowodnić, że f spełnia warunek Höldera z wykładnikiem α, tj.

$$\exists C > 0 \; \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|^{\alpha} \, .$$