Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Zbieżność jednostajna ciągów funkcyjnych

Zaległe:

1. Obliczyć granicę
$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)\,.$$

2. Znaleźć funkcję $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ taką, że granica
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(f(0+h) - 2f(0) + f(0-h)\right)$$
istnieje ale f nie ma drugiej pochodnej w $x = 0$.

Definicja 1. Niech $f_n : A \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcyjnym.

- Mówimy, że f_n *zbiega punktowo* do funkcji f (ozn. $f_n \to f$) jeśli
$$\forall x \in A \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

- Mówimy, że f_n *zbiega jednostajnie* do funkcji f (ozn. $f_n \rightrightarrows f$) jeśli
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N\ \forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon\,.$$

- Niech $K \subseteq A$. Definiujemy *obcięcie*[1] funkcji f do K jako funkcję $f|_K : K \to \mathbb{R}$ spełniającą $f|_K(x) = f(x)$ dla każdego $x \in K$.

- Mówimy, że f_n *zbiega niemal jednostajnie* do funkcji f (ozn. $f_n \overset{\text{niemal}}{\rightrightarrows} f$) jeśli dla każdego zbioru zwartego[2] $K \subseteq A$ ciąg funkcyjny $g_n = f_n|_K : K \to \mathbb{R}$ (czyli $g_n(x) = f_n(x)$ dla $x \in K$) zbiega jednostajnie do $f|_K$.

Uwaga 1. Niech $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ będą pewnymi funkcjami. Definiujemy ciąg liczbowy (dopuszczamy wartości nieskończone)
$$d_n = \sup\Big\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\Big\} \in [-\infty, \infty]\,.$$

Zachodzi następujący fakt: *ciąg funkcyjny f_n zbiega jednostajnie do f wtedy i tylko wtedy gdy* $\lim_{n\to\infty} d_n = 0$.

---

[1] Można też spotkać się określeniami: *zwężenie* lub *ograniczenie*.
[2] Zbiór *zwarty* to zbiór domknięty i ograniczony.

1. Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną ciągów funkcyjnych:

$$
\begin{array}{ll}
a)\ f_n(x) = n\sin\sqrt{4\pi^2n^2+x^2} : [0,\infty) \to \mathbb{R} & b)\ f_n(x) = \sqrt[n]{x} : [0,\infty) \to \mathbb{R} \\
c)\ f_n(x) = n^3 x\exp(-nx^2) : [0,1] \to \mathbb{R} & d)\ f_n(x) = \mathrm{arctg}(nx) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
e)\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+(nx-1)^2} : [0,1] \to \mathbb{R} & f)\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n} : [0,1] \to \mathbb{R} \\
g)\ f_n(x) = x^n(1-x) : [0,1] \to \mathbb{R} & h)\ f_n(x) = nx^n(1-x) : [0,1] \to \mathbb{R} \\
i)\ f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2+(nx-1)^2} : [0,1] \to \mathbb{R} & j)\ f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx} : [0,1] \to \mathbb{R} \\
k)\ f_n(x) = \cos^n(x)(1-\cos^n(x)) : [0,\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R} & l)\ f_n(x) = \cos^n(x)\sin^{2n}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
m)\ f_n(x) = \sqrt{n+1}\sin^n(x)\cos(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & n)\ f_n(x) = \dfrac{x}{n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
o)\ f_n(x) = n^2\dfrac{1-\cos(\frac{x}{n})}{x} : (0,\infty) \to \mathbb{R} & p)\ f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,.
\end{array}
$$

2. Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną ciągu

$$f_n(x) = \exp\left(x + \tfrac{1}{\sqrt{\ln n}}\right) + \cos\left(\tfrac{x}{(1+\frac{1}{n})^n}\right) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

3. Niech $f(x) = \frac{x}{\exp(2x)} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Definiujemy

$$f_n(x) = f^{\circ n}(x) = \underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ razy}}(x) : [0,\infty) \to \mathbb{R}\,.$$

Zbadać zbieżność jednostajną ciągu f_n.

4. Dane są dwa ciągi funkcyjne $f_n : A \to \mathbb{R}$ i $g_n : A \to \mathbb{R}$ zbieżne jednostajnie do funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ i $g : A \to \mathbb{R}$ odpowiednio.

   (a) Czy $f_n + g_n \rightrightarrows f + g$?

   (b) Czy $f_n g_n \rightrightarrows fg$?

5. Dany jest ciąg funkcyjny $f_n : A \to \mathbb{R}$ zbieżny punktowo do $f : A \to \mathbb{R}$. Wiadomo ponadto, że istniej ciąg punktów $x_n \in A$ taki, że $x_n \to x_0 \in A$ i zarazem $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) \neq f(x_0)$. Czy, mimo to, może się zdażyć, że $f_n \rightrightarrows f$?